

# Optica II. Tema 1

## Ondas de Luz Localmente Planas e Ondas de Luz Paraxiais

*Grao en Física*

Suso Liñares Beiras

Área de Óptica. Departamento de Física Aplicada.  
Universidade de Santiago de Compostela

O tema comeza estudando os fundamentos ópticos das **ondas de luz localmente planas (LP)** e a súa representación complexa vectorial obtida baixo a chamada aproximación de lonxitude de onda (*l.d.o.*) moi curta (tamén chamada aproximación case-xeométrica, aproximación WKB-óptica ou aproximación asintótica).

Afondarase no concepto de **fluxo de enerxía luminosa** (vector de Poynting) con ondas LP, o que permite, por unha banda, obter a expresión xeral da solución eikonal ou WKB-óptica, e por outra, obter dun xeito rigoroso o **límite da óptica xeométrica** e o seu significado óptico. Asemade, as ondas LP proporcionan as **bases** para o estudo de fenómenos de **propagación, interferencia e difracción**.

De seguido, e na aproximación paraxial (**óptica ondulatoria paraxial**), aprenderase a representar e a identificar ondas de luz non planas, especialmente as esféricas, esferocilíndricas e as Gaussianas (esenciais para entender a luz láser), tanto de xeito escalar coma vectorial.

Asemade, aprenderase a facer o estudo ondulatorio de discontinuidades paraxiais. Destes estudos se derivan como corolarios as distintas leis de conxugación e sobre de todo as **funcións de transmisión e reflexión**, de grande utilidade na óptica ondulatoria.

En resumo, todo o tema ten coma obxectivo global preparar conceptos e ferramentas necesarios para o estudo posterior da interferencia e da difracción de luz, especialmente na aproximación paraxial.



Esta obra licenciose coa Licenza CC-BY-NC-ND Creative Commons Atribución-Non comercial-Non derivadas 4.0 Internacional. Título: *Ondas de Luz Localmente Planas e Ondas de Luz Paraxiais*. Autor: *Jesús Liñares Beiras*, Universidade de Santiago de Compostela. Para ver unha copia desta licenza, visitar <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/>.

# Índice Xeral

<b>1. Ondas Localmente Planas (LP)</b>	<b>3</b>
1.1. FUNDAMENTOS DAS ONDAS LP	3
1.2. SOLUCIÓN EIKONAL OU WKB DE ONDAS LP	4
1.3. FLUXO DE ENERXÍA E RAIOS DE LUZ	6
1.4. A OX COMO LÍMITE $\lambda_o \rightarrow 0$	6
1.5. ONDAS NON PLANAS BÁSICAS	7
1.6. POLARIZACIÓN LOCAL E CASE-GLOBAL [C]	9
1.6.1. POLARIZACIÓN LOCAL DE ONDAS LP	9
1.6.2. ONDAS PARAXIAIS E POLARIZACIÓN CASE-GLOBAL	10
1.7. PROBA DO PPIO DE FERMAT E SOLUCIÓN EIKONAL [C]	12
1.8. EIKONAL (ÓPTICA) ELECTRÓNICA	13
1.9. EIKONAL (ÓPTICA) GRAVITACIONAL	13
1.10. MEDIO INHOMOXÉNEO FEBLE [C]	14
<b>2. Óptica Paraxial de Discontinuidades</b>	<b>15</b>
2.1. INTRODUCCIÓN ÁS ONDAS PARAXIAIS	15
2.2. ECUACIÓN DE ONDAS DE FRESNEL OU PARAXIAL [C]	16
2.3. ONDAS PARAXIAIS E DISCONTINUIDADES	17
2.4. DISCONTINUIDADES ÓPTICAS PLANAS	20
2.5. ONDAS -FEIXES- ESFÉRICAS GAUSSIANAS	23
2.6. ONDAS -FEIXES- HERMITE-GAUSS	25
2.7. DISCONTINUIDADES PARAXIAIS NON PLANAS	27
2.8. FUNCIÓNS DE TRANSMISIÓN E DISCONTINUIDADES	28
2.9. DISCONTINUIDADES ÓPTICAS MÚLTIPLES [C]	31
2.10. TRANSMISIÓN EN ELEMENTOS ÓPTICOS DELGADOS	32
2.11. TRATAMENTO ONDULATORIO XERAL DALENTE DELGADA [C]	36
2.12. TRATAMENTO ONDULATORIO DUN PRISMA DELGADO	38
2.13. DISCONTINUIDADES REFLECTANTES SIMPLES	40
2.14. CAVIDADES ÓPTICAS: ONDAS ESTACIONARIAS	43
2.15. DISCONTINUIDADES EN METAMATERIAIS [C]	45
<b>SUPLEMENTOS</b>	<b>47</b>
S1.-INTERACCIÓN CLÁSICA LUZ-MATERIA	47
S2.-TEORÍA DE MAXWELL PARA ONDAS LP	48
S3.-OPTICA DE ELECTRÓNS	49
S4.-OPTICA GRAVITACIONAL	50
S5.-DEFLEXIÓN GRAVITACIONAL DA LUZ	50
S6.-DISCONTINUIDADES ESFEROCILÍNDRICAS LP	52
S7.-ONDAS NON-PLANAS EN ANISÓTROPAS	53
S8.-CONDICIÓNS DE CONTORNO PARAXIAIS	54
S9.-INSTRUMENTOS OPTICOS BÁSICOS	55

## Lista de Abreviaciones

1D	Unidimensional.
2D	Bidimensional.
3D	Tridimensional.
c.c.	conjugado complejo.
c.d.c.	condicións de continuidade.
EdR	Ecuacións de Raios.
EEH	Ecuación Escalar de Helmholtz.
EEO	Ecuación Escalar de Ondas.
EIK	Ecuación Eikonal.
EOF	Ecuación de Ondas de Fresnel (ou Paraxial).
ES	Ecuación de Schroedinger.
f.d.a.	factor de amplitude.
FdR	Función de Reflexión.
FdT	Función de Transmisión.
H-G	Funcións Hermite-Gauss.
HFY	Modelo de Huygens-Fresnel-Young.
IF	Integral de Fermat.
ILM	Interacción Luz-Materia.
IO	Instrumento Óptico.
l.d.o.	lonxitude de onda.
LAM	Lei de Ampere-Maxwell.
LAM-LP	Lei de Ampere-Maxwell para Ondas LP.
LCO	Lonxitude de Camiño Óptico.
LdA	Lei do Aumento.
LdC	Lei de Conxugación.
LGE	Lei de Gauss Eléctrica.
LGE-LP	Lei de Gauss Eléctrica para Ondas LP.
LGM	Lei de Gauss Magnética.
LGM-LP	Lei de Gauss Magnética para Ondas LP.
LIF	Lei de Inducción de Faraday.
LIF-LP	Lei de Inducción de Faraday para Ondas LP.
LP	Localmente Plana (Onda).
MAO	Momento Angular Orbital.
MIF	Medio Inhomoxéneo Feble.
OX	Óptica Xeométrica.
PF	Principio de Fermat.
SR	Sistema de Referencia.
STED	Stimulated Emission Depletion.
SV	Sistema Visual.
TE	Transversal Eléctrico.
TM	Transversal Magnético.
WKB	Wentzel–Kramers–Brillouin.

## 1. Ondas Localmente Planas (LP)

### 1.1. FUNDAMENTOS DAS ONDAS LP

■ **Modelo ondulatorio.** Desenvolto por **Huygens-Fresnel-Young** (HFY). No modelo HFY a luz é unha onda vectorial asociada a un **campo óptico vectorial**  $\Psi(\mathbf{r}, t) = \Psi(\mathbf{r}, t)\mathbf{u}(\mathbf{r})$ , con  $\mathbf{u}(\mathbf{r})$  un versor local, e  $\Psi(\mathbf{r}, t)$  solución da Ecuación Escalar de Ondas (EEO), i.e., en medios materiais, en xeral inhomoxéneos con  $n(\mathbf{r}) = c/v(\mathbf{r})$  (ver **S1**), o campo óptico  $\Psi(\mathbf{r}, t)$  verifica a EEO

$$\nabla^2 \Psi(\mathbf{r}, t) - \frac{n^2(\mathbf{r})}{c^2} \frac{\partial^2 \Psi(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} = 0$$

Son ondas **transversais** (Young), é dicir,  $\Psi(\mathbf{r}, t)$ , logo  $\mathbf{u}(\mathbf{r})$ , é perpendicular á dirección de propagación da onda (normais de onda). Pódese xustificar que dita transversalidade, xunto con  $\omega \gg$ , fai que cada compoñente de  $\Psi$  verifique, en boa aproximación, a EEO (para **ondas planas** é exacto).

-Coas Ecuacións de **Maxwell** en 1862 á onda de luz dásele o significado físico de onda electromagnética, é dicir,  $\Psi(\mathbf{r}, t) \rightarrow \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$  (a luz xa era: onda, transversal,  $v \approx c, \dots$ ).

-Unha onda harmónica xeral de luz de frecuencia  $\omega$  representárase en notación complexa como:  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = E(\mathbf{r}, t)\mathbf{u}(\mathbf{r}) = \mathcal{E}(\mathbf{r})e^{-i\omega t}\mathbf{u}(\mathbf{r}) = \mathcal{E}(\mathbf{r})e^{-i\omega t}$ , con  $\mathbf{u}(\mathbf{r})$  un vector unitario complexo (**polarización**) e  $\mathcal{E}(\mathbf{r})$  un campo óptico escalar espacial.

-En medios homoxéneos cada compoñente de  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathcal{E}(\mathbf{r})e^{-i\omega t}$  **verifica a EEO** se cumpren a **Lei de Gauss Electrica (LGE):  $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$**  (ver **S2**) (para **ondas planas** é exacto). En medios inhomoxéneos febles  $\nabla \cdot (\epsilon \mathbf{E}) = 0 \rightarrow \nabla \cdot \mathbf{E} \approx 0$ . Sustituíndo  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$  na EEO e usando o nº de onda  $k_o = \omega/c = 2\pi/\lambda_o$ , cada compoñente de  $\mathcal{E}(\mathbf{r})$  verifica a EEO de **Helmholtz** (EEH) (ver **S2**),

$$\boxed{\nabla^2 \mathcal{E}(\mathbf{r}) + k_o^2 n^2(\mathbf{r}) \mathcal{E}(\mathbf{r}) = 0} \quad (1)$$

-Hai un conxunto importante de ondas (con  $\omega \gg$ ) cuxa amplitude escalar  $\mathcal{E}(\mathbf{r})$  satisface aprox. a EEO, e a amplitude vectorial  $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathcal{E}(\mathbf{r})\mathbf{u}(\mathbf{r})$  a LGE (HFY) (**ondas LP**).

■ **Concepto de onda LP.** Lembremos que unha **onda plana** harmónica nun medio de índice  $n_o$ , ten o seguinte campo óptico asociado

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E} e^{i\{\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t\}} = \{\mathbf{k} = k_o n_o \mathbf{s}\} = \mathbf{E} e^{i\{k_o(n_o \mathbf{s}\mathbf{r}) - \omega t\}} = \mathbf{E} \mathbf{u} e^{i\{k_o(n_o \mathbf{s}\mathbf{r}) - \omega t\}} \quad (2)$$

-**Xeralizando** a fase da onda  $\varphi = k_o(n_o \mathbf{s}\mathbf{r}) \rightarrow \varphi = k_o \mathcal{L}(\mathbf{r})$ , a amplitude da onda  $E \rightarrow E(\mathbf{r})$  e  $\mathbf{u} \rightarrow \mathbf{u}(\mathbf{r})$ , temos a representación máis xeral, en **notación complexa**, da onda luminosa,

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{r}) e^{ik_o \mathcal{L}(\mathbf{r})} e^{-i\omega t} = \mathbf{E}(\mathbf{r})\mathbf{u}(\mathbf{r}) e^{ik_o \mathcal{L}(\mathbf{r})} e^{-i\omega t} = \mathcal{E}(\mathbf{r})\mathbf{u}(\mathbf{r}) e^{-i\omega t} = \mathcal{E}(\mathbf{r}) e^{-i\omega t} \quad (3)$$

con  $\mathcal{E}(\mathbf{r}) = E(\mathbf{r}) e^{ik_o \mathcal{L}(\mathbf{r})}$  a amplitude espacial escalar. Nótese que hai unha amplitude vectorial complexa  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$  e unha fase espacial  $k_o \mathcal{L}$  ponderada por  $k_o \gg 1$  no rango espectral visible. Usando Taylor en  $\mathbf{r}_o$  na fase (a orde 1) e na amplitude (a orde 0) obtemos

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \simeq \mathbf{E}(\mathbf{r}_o) e^{i\{k_o[\mathcal{L}(\mathbf{r}_o) + \nabla \mathcal{L}(\mathbf{r}_o)(\mathbf{r} - \mathbf{r}_o)] - \omega t\}} = e^{i\epsilon(\mathbf{r}_o)} \mathbf{E}(\mathbf{r}_o) e^{i\{k_o \nabla \mathcal{L}(\mathbf{r}_o) \mathbf{r} - \omega t\}} \quad (4)$$

-Se esta expresión é válida en toda rexión de radio promedio  $\bar{R} \gg \lambda_o$ , entón o campo da Ec. (3) é unha **onda Localmente Plana (LP)** (máis formalmente, dita expresión é válida se  $\mathcal{L}(\mathbf{r})$  cumpre a **condición**  $(\mathbf{r} - \mathbf{r}_o) \mathcal{H}[\mathcal{L}(\mathbf{r}_o)] (\mathbf{r} - \mathbf{r}_o)^T \ll 1$ , con  $\mathcal{H}[\mathcal{L}(\mathbf{r}_o)]$  o Hessiano).

-As ondas LP son un amplo e interesante conxunto de solucións aproximadas da EEO que exemplifican moi ben o concepto de onda vectorial transversal.



## 1.2. SOLUCIÓN EIKONAL OU WKB DE ONDAS LP

Imos obter de xeito **heurístico** (é dicir, mediante o uso de conceptos e cálculos sinxelos) a amplitude  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$  e a fase  $\mathcal{L}(\mathbf{r})$  das ondas LP (nótese que  $\mathcal{L}(\mathbf{r}) = \text{cte}$ , segundo Ec. (3), define unha **superficie de fase constante**).

■ **Vector de onda local.** Fisicamente, a aproximación LP supón ondas con **variacións lentas** da fase ( $k_o$ ), logo variacións moito máis lentas da amplitude ( $k_o^0$ ) (ver Figura).



Tendo en conta os resultados da fase espacial das ondas planas, i.e.,  $\varphi_e = \mathbf{k}\mathbf{r} = (k_o n_o \mathbf{s})\mathbf{r}$ , entón para ondas LP obtemos, da fase  $\varphi_e = k_o \nabla \mathcal{L}(\mathbf{r}_o)\mathbf{r}$  da Ec. (4), un **vector de onda local**  $\mathbf{k}_l(\mathbf{r})$  en  $\mathbf{r}$  (calquera  $\mathbf{r}_o$ ), que define á súa vez, en analogía coas ondas planas (nun medio de índice  $n$  en  $\mathbf{r}$ ), unha dirección  $\mathbf{s}(\mathbf{r})$  dunha normal de onda local i.e.,

$$\mathbf{k}_l(\mathbf{r}) = k_o \nabla \mathcal{L}(\mathbf{r}) \equiv k_o n(\mathbf{r}) \mathbf{s}(\mathbf{r}) \Rightarrow \mathbf{s}(\mathbf{r}) = \frac{\nabla \mathcal{L}(\mathbf{r})}{n} \quad (5)$$

Nótese que  $\nabla \mathcal{L}(\mathbf{r}) \perp \mathcal{L}(\mathbf{r})$  en cada punto  $\mathbf{r}$ , i.e., é a **normal de onda**. Pero tamén, en analogía coas propiedades enerxéticas das ondas planas,  $\mathbf{s}(\mathbf{r})$  define o **fluxo local de enerxía** (vector **unitario de Poynting** local).

-Asemade as ondas LP deben presentar **transversalidade local**:  $\mathbf{k}_l(\mathbf{r}) \perp \mathbf{u}(\mathbf{r})$ , o que á súa vez determina os posibles valores de  $\mathbf{u}(\mathbf{r})$  localmente, i.e., en cada punto  $\mathbf{r}$ .

■ **Fase das ondas LP.** Da relación anterior obtemos a denominada **Ecuación Eikonal** (EIK), que é unha ecuación diferencial non lineal, para a fase espacial da onda  $\varphi_e = k_o \mathcal{L}(\mathbf{r})$ , i.e., para  $\mathcal{L}(\mathbf{r})$ . En efecto,

$$\mathbf{s}^2(\mathbf{r}) = 1 = \frac{(\nabla \mathcal{L}(\mathbf{r}))^2}{n^2} \Rightarrow (\nabla \mathcal{L})^2 = \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z}\right)^2 = n^2 \quad (6)$$

-Como foi comentado  $\mathcal{L}(\mathbf{r}) = \text{cte}$ , segundo Ec. (3), define unha superficie de fase constante, pero tamén, segundo a Ec. (5), é **unha superficie de onda**, i.e., o lugar xeométrico de puntos alcanzado pola enerxía nun tempo  $t$  (nótese que de xeito local, temos “pequenas” superficies de onda planas que transportan a enerxía segundo a dirección  $\mathbf{s}(\mathbf{r})$ ).

**Obs.-**Para xustificar rigorosamente as propiedades vectoriais (como a transversalidade) e as enerxéticas (como a dirección de transporte da enerxía segundo a normal de onda) das ondas LP precísase da Óptica de Maxwell ou Electromagnética (ver Suplementos **S2.1, S2.2**).

■ **Vector de Poynting.** Sexa unha onda LP harmónica, entón obtemos a seguinte LGE aproximada a orde  $1/k_o$  ( $k_o=2\pi/\lambda_o \approx 10^4 \text{mm}^{-1}$  se  $\lambda_o \approx 0.63 \mu\text{m}$ ):  $\nabla \mathcal{L} \mathbf{E} \approx 0$  ( $k_l \mathbf{E} \approx 0$ ) (Exer). De igual xeito obtemos a seguinte Lei de Inducción de Faraday (LIF) aproximada para dita onda,  $(\nabla \mathcal{L} \wedge \mathbf{E}) \approx c\mu_o \mathbf{H}$ . Lembrando a expresión do vector de Poynting en promedio temporal para unha onda harmónica obtemos

$$\langle \mathbf{S} \rangle = \langle \mathbf{E}_R \wedge \mathbf{H}_R \rangle = \frac{1}{2} (\mathbf{E} \wedge \mathbf{H}^*) \approx \frac{1}{2} \mathbf{E} \wedge \frac{1}{c\mu_o} (\nabla \mathcal{L} \wedge \mathbf{E}^*),$$

onde \* indica complexo conxugado (c.c.). Tendo en conta o produto triple e a LGE obtemos o seguinte vector de Poynting para ondas LP

$$\langle \mathbf{S} \rangle = \frac{1}{2c\mu_o} E^2 \nabla \mathcal{L} = \frac{n}{2c\mu_o} E^2 \left( \frac{\nabla \mathcal{L}}{n} \right) \equiv \frac{n}{2c\mu_o} E^2 (\mathbf{s}) \quad (7)$$

onde  $E=|\mathbf{E}|=|\mathbf{E}|$ , e  $\nabla \mathcal{L}/n=\mathbf{s}$  é o **vector local unitario de Poynting** que determina a dirección local do fluxo de enerxía das ondas LP, como se adiantou de xeito heurístico. Consecuentemente, a **envolvente** destes vectores  $\nabla \mathcal{L}/n$  define as **liñas de fluxo** da enerxía luminosa (raios de luz).

■ **Amplitude das ondas LP.** Tendo en conta a expresión de  $\langle \mathbf{S} \rangle$ , a conservación local da enerxía para ondas harmónicas é

$$\left\langle \frac{\partial u}{\partial t} + \nabla (\mathbf{E}_R \wedge \mathbf{H}_R) \right\rangle_t = \nabla \langle \mathbf{S} \rangle = \frac{1}{2c\mu_o} \nabla (E^2 \nabla \mathcal{L}) = 0 \quad (8)$$

Do que se obtén unha ecuación diferencial para a amplitude escalar  $E(\mathbf{r})$  e unha solución formal. Da Ec. (8) temos

$$2E(\mathbf{r}) \nabla E(\mathbf{r}) \nabla \mathcal{L} + (\nabla^2 \mathcal{L}) E(\mathbf{r}) E(\mathbf{r}) = 0 \quad (9)$$

e se **multiplicamos** esta ecuación polo factor (escalar)  $\{\nabla \mathcal{L} d\mathbf{r}\}$ , obtemos a ecuación diferencial

$$2\nabla E(\mathbf{r}) d\mathbf{r} (\nabla \mathcal{L})^2 + (\nabla^2 \mathcal{L}) \nabla \mathcal{L} d\mathbf{r} E(\mathbf{r}) = 0 \Rightarrow \frac{dE(\mathbf{r})}{E(\mathbf{r})} = -\frac{(\nabla^2 \mathcal{L}) \nabla \mathcal{L}}{2(\nabla \mathcal{L})^2} d\mathbf{r} \quad (10)$$

Daquela obtense, por integración directa, a expresión xeral da amplitude do campo óptico escalar,

$$E(\mathbf{r}) = \left( A_o e^{-\int \frac{\nabla^2 \mathcal{L}}{2n^2} \nabla \mathcal{L} d\mathbf{r}} \right) = A_o F(\mathbf{r}) \quad (11)$$

Nótese que a amplitude é o produto dun **factor de amplitude** escalar  $A_o$ , que engloba ctes de integración, e unha función  $F(\mathbf{r})$ .

■ **Vector de polarización  $\mathbf{u}(\mathbf{r})$ .** O **vector unitario local  $\mathbf{u}(\mathbf{r})$**  cumpre pola LGE,  $\nabla \mathcal{L} \mathbf{u} \approx 0$ , xa que  $\mathbf{E}(\mathbf{r}) \propto \mathbf{u}(\mathbf{r})$ , é dicir, a relación de transversalidade  $\mathbf{u}(\mathbf{r}) \perp \nabla \mathcal{L}(\mathbf{r})$ .

■ **Solución Eikonal (ou WKB óptica).** Coa solución da ecuación eikonal  $\mathcal{L}(\mathbf{r})$  (fase) da Ec. (6) e a da Ec. (10) (amplitude), obtemos a solución eikonal (ou WKB óptica)

$$\mathcal{E}(\mathbf{r}) = \mathcal{E}(\mathbf{r}) \mathbf{u}(\mathbf{r}) = E(\mathbf{r}) e^{ik_o \mathcal{L}(\mathbf{r})} \mathbf{u}(\mathbf{r}) = \left( A_o e^{-\int \frac{\nabla^2 \mathcal{L}}{2n^2} \nabla \mathcal{L} d\mathbf{r}} \right) e^{ik_o \mathcal{L}(\mathbf{r})} \mathbf{u}(\mathbf{r}) \quad (12)$$

-Pódese probar que o campo  $\mathcal{E}(\mathbf{r})$  é unha solución exacta a orde  $k_o^{-1}$  da EEH (S2.3), i.e., con erro  $\leq (1/k_o^2)$ . De feito se a aproximación de onda plana local non se cumpre en  $\bar{R} \gg \lambda$  entón aparecen erros  $\geq (1/k_o^2)$ .

### 1.3. FLUXO DE ENERXÍA E RAIOS DE LUZ

Achemos as **envolventes**  $r$  de todos os vectores unitarios locais de Poynting  $s = \nabla \mathcal{L}/n$ , é dicir, curvas tal que os vectores  $s$  son tanxentes a elas. Formalmente

$$s = d\mathbf{r}(s)/ds = \left( \frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds} \right) \equiv \mathbf{r}'(s) = \nabla \mathcal{L}/n \quad (13)$$

onde  $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$  (diferencial de arco) con  $s$  o parámetro lonxitude de arco. Derivemos agora a ecuación diferencial que deben verificar. Se tomamos gradientes na EIK obtemos

$$\nabla(\nabla \mathcal{L})^2 = \nabla n^2 \Leftrightarrow \nabla \mathcal{L} \nabla(\nabla \mathcal{L}) = n \nabla n \quad (14)$$

e tendo en conta que  $\nabla \mathcal{L} = n \mathbf{s}(\mathbf{r}) = n d\mathbf{r}/ds$ , e que formalmente  $\nabla \equiv d/dr$  obtemos a **ecuación** para  $\mathbf{r}(s)$ ,

$$n \frac{d\mathbf{r}}{ds} \frac{d}{d\mathbf{r}} \left( n \frac{d\mathbf{r}}{ds} \right) = n \nabla n \Leftrightarrow \frac{d}{ds} \left( n \frac{d\mathbf{r}}{ds} \right) = \nabla n \quad (15)$$

ou alternativamente  $\mathbf{r}(z)$ ,

$$\frac{d}{dz} \left( n \frac{d\mathbf{r}/dz}{ds/dz} \right) \frac{dz}{ds} = \frac{d}{dz} \left( n \frac{d\mathbf{r}/dz}{R(\dot{x}, \dot{y})} \right) \frac{1}{R(\dot{x}, \dot{y})} = \nabla n \quad (16)$$

onde  $ds/dz = R(\dot{x}, \dot{y}) = \sqrt{1 + \dot{x}^2 + \dot{y}^2}$ , con  $\dot{x} = dx/dz$  e  $\dot{y} = dy/dz$  (se os ángulos fosen pequenos entón  $R \approx 1$ , logo  $ds \approx dz$ , chamada aproximación paraxial).

-Daquela, as envolventes (ou liñas de fluxo)  $\mathbf{r}(s)$  ou  $\mathbf{r}(z)$  verifican as coñecidas **Ecuacións de Raios (EdR)** (15) ou (16), **deducidas da EIK**. Conclúese así que as liñas de fluxo luminoso son a definición fisico-matemática dos **raios de luz** da Óptica Xeométrica (OX) e as súas derivadas  $\mathbf{r}' = \mathbf{s}$  son os vectores de Poynting locais.

#### 1.4. A OX COMO LÍMITE $\lambda_o \rightarrow 0$

Sexa por simplicidade unha onda que só depende de  $z$ , i.e.,  $\mathcal{E}(z) = E(z) \exp\{ik_o \mathcal{L}(z)\}$ , logo sustituíndo na EEH 1D (unidimensional), é dicir, na ecuación

$$\frac{\partial^2 \mathcal{E}(z)}{\partial z^2} + k_o^2 n^2(z) \mathcal{E}(z) = 0$$

facendo a derivada segunda en  $z$  do campo  $\mathcal{E}(z)$  e multiplicando o resultado por  $(1/k_o^2)$  obtemos

$$\frac{1}{k_o^2} \frac{\partial^2 E}{\partial z^2} + \frac{2i}{k_o} \frac{\partial E}{\partial z} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z} + \frac{i}{k_o} \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial z^2} E - \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z} \right)^2 E + n^2(z) E = 0 \quad (17)$$

No límite  $\lambda_o \rightarrow 0$  obtemos a EIK 1D exacta:  $(\partial \mathcal{L} / \partial z)^2 = n^2(z)$  (**en 3D**  $z \rightarrow \mathbf{r}$ , entón obteríamos  $(\nabla \mathcal{L})^2 = n^2$ ), polo tanto neste límite obtense a **OX exacta**.

-Se impomos que se cumpla a EIK (o que determina a fase da onda) entón é doado comprobar que a integración da suma do 2º eo 3º termos de (17) igualada a cero, é xusto a ecuación de amplitude (9) en 1D. Daquela, a solución eikonal ten un **erro da orde**  $\leq (1/k_o^2)$  debido ao 1º termo, como xa tiñamos comentado e agora probado.

En resumo: esta é a **vía exacta (non heurística)** para obter a EIK, que proporciona a fase da onda  $\mathcal{L}(\mathbf{r})$ , e a ecuación da amplitude, que proporciona  $E(\mathbf{r})$ .

### 1.5. ONDAS NON PLANAS BÁSICAS

Usando a solución (xeral) Eikonal ou WKB-óptica (12) nun medio homoxéneo  $n_o$  é posible achar a fase e a amplitude das ondas LP.

**-Ondas planas.** Comecemos co caso máis familiar dunha onda plana. Sen perda de xeralidade podemos coller  $(\partial\mathcal{L}/\partial x)^2 = (\partial\mathcal{L}/\partial y)^2 = 0$ , entón  $(\partial\mathcal{L}/\partial z)^2 = n_o^2$  e  $\mathcal{L}(\mathbf{r}) = \pm n_o z$  logo fase  $\varphi_p = \pm k_o n_o z \equiv kz$  (nun Sistema de Referencia (SR) arbitrario  $\xi\gamma\eta$ , teríamos a expresión  $\mathcal{L}(\mathbf{r}) = \pm n_o \eta = \pm n_o s\mathbf{r}$ ). Por outra banda de (11) podemos achar a amplitude,

$$E(\mathbf{r}) = A_o \exp\left\{-\int \frac{1}{2n_o^2} (\nabla^2 \mathcal{L}) \nabla \mathcal{L} d\mathbf{r}\right\} = A_o \in \mathbb{C}$$

logo temos a onda plana  $\mathcal{E}(\mathbf{r}) = A_o e^{\pm i k_o n_o z}$  (as ondas planas son unha excelente base funcional espacial). Estructura vectorial trivial, p.ex.,  $\mathbf{u} = (\mathbf{u}_x + i\mathbf{u}_y)/2$ .

**-Ondas esféricas.** Sexan as coordenadas esféricas centradas en  $\mathbf{r}_o$  (fonte puntual de luz), é dicir,  $r = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_o| = \sqrt{(x - x_o)^2 + (y - y_o)^2 + (z - z_o)^2}$ . A eikonal para solucións con simetría esférica é  $(\partial\mathcal{L}/\partial r)^2 = n_o^2$ , logo  $\mathcal{L} = n_o r$ , e obtemos a fase  $\varphi_e = k_o \mathcal{L} = k_o (n_o r) \equiv kr$ , e entón a amplitude

$$E(\mathbf{r}) = A_o \exp\left\{-\int \frac{1}{2n_o^2} \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r})\right) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r} dr\right\} = \frac{A_o}{r}$$

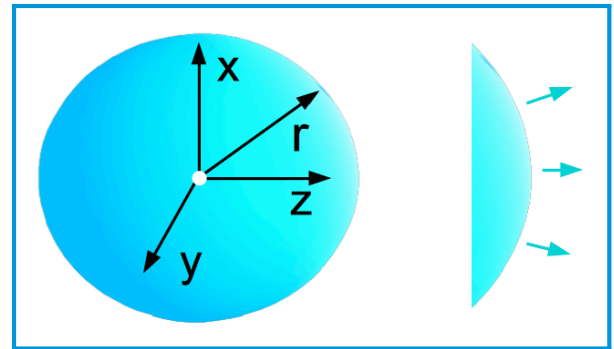
logo

$$\mathcal{E}(\mathbf{r}) = \frac{A_o}{r} e^{ikr} = \frac{A_o}{[(x - x_o)^2 + (y - y_o)^2 + (z - z_o)^2]^{1/2}} e^{ik\sqrt{(x - x_o)^2 + (y - y_o)^2 + (z - z_o)^2}}$$

que describe unha onda esférica **diverxente** ( $\nabla\mathcal{L}/n_o = \mathbf{u}_r$ ) da fonte puntual sita en  $\mathbf{r}_o$  e cun **factor de amplitude**  $A_o$ .

Tamén temos a solución  $\mathcal{L} = -n_o r$ , i.e., unha onda esférica **converxente** a  $\mathbf{r}_o$ . Abonda con ver que o vector de Poynting é  $\mathbf{s} = \nabla\mathcal{L}/n_o = -\mathbf{u}_r$ .

**-Seccións S de onda** (planas, esféricas, etc.). **Na práctica** as ondas son seccións cuxa amplitude e fase coinciden en moi boa aproximación coas da onda completa (ver Figura) salvo nas fronteiras.



**-EEH para ondas esféricas.** É de interese comprobar, usando **coordenadas esféricas**, que a onda esférica co campo óptico  $\mathcal{E}(\mathbf{r}) = (A_o/r) e^{ikr}$ , onde  $k = k_o n_o$ , é solución exacta da EEH (invarianza angular). Sustituíndo a expresión da onda esférica na EEH (1) vese que unha onda esférica é unha onda LP exacta (tamén outra excelente base funcional espacial).

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \mathcal{E}(\mathbf{r})}{\partial r} \right) + k^2 \mathcal{E}(\mathbf{r}) = 0 = \frac{A_o}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (-e^{ikr} + ikre^{ikr}) + k^2 \frac{A_o}{r} e^{ikr} = 0$$

**Exem. de estrutura vectorial.** Onda esférica ordinaria emerxente de (0,0,0) nun medio uniáxico: se p.ex. o eixo óptico é Y temos a ligadura de que só pode vibrar en xz, p.ex.,  $\mathbf{u} = \frac{1}{\rho}(-z, 0, x)$  (polarización lineal local), con  $\rho = (x^2 + z^2)^{1/2}$ , x.q.  $\mathbf{u} \perp \nabla\mathcal{L}/n_o = \frac{1}{r}(x, y, z)$ .

**-Ondas cilíndricas.** Sexan coordenadas cilíndricas centradas en  $\rho_o$  (fonte lineal de luz), é dicir,  $\rho=|\rho-\rho_o|$ . A eikonal para solucións con simetría cilíndrica é  $(\partial\mathcal{L}/\partial\rho)^2=n_o^2$ , logo temos a fase  $\mathcal{L}=n_o\rho$  (e tamén  $\mathcal{L}=-n_o\rho$ ), e a amplitude

$$E(\rho) = A_o \exp\left\{-\int \frac{1}{2n_o^2} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial\rho} \left(\rho \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\rho}\right)\right) \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\rho} d\rho\right\} = A_o/\rho^{1/2}$$

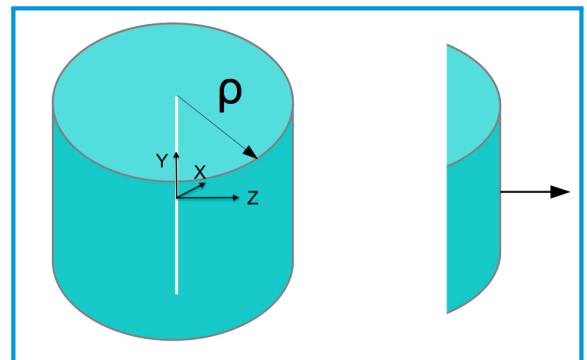
Daquela obtemos a onda cilíndrica  $\mathcal{E}(\rho)=(A_o/\rho^{1/2}) e^{ik\rho}$  con  $k=k_o n_o$ , procedente dunha fonte lineal sita en  $\rho_o$  ao longo de  $\rho_\perp$  (dirección perpendicular a  $\rho$ ). P.ex., se  $\rho=(x, z)$ , entón  $\rho_\perp = y\mathbf{u}_y$ , e a fonte lineal estará en calquera  $\rho_o=(x_o, z_o)$  paralela ao eixo  $y$ , i.e., onda  $y$ -cilíndrica (ou invariante en  $y$ ), daquela usando  $\rho=|\rho-\rho_o| = \sqrt{(x-x_o)^2 + (z-z_o)^2}$  obtemos

$$\mathcal{E}(\rho) = \frac{A_o}{\rho^{1/2}} e^{ik\rho} = \frac{A_o}{[(x-x_o)^2 + (z-z_o)^2]^{1/4}} e^{ik\sqrt{(x-x_o)^2 + (z-z_o)^2}}$$

**Exems.** de estrutura vectorial: unha onda  $y$ -cilíndrica pode ter polarización lineal global  $\mathbf{u}_y$ . Tamén pode ter polarización lineal local nas direccións con compoñentes  $xz$ , é dicir,  $\mathbf{u} = (-(z-z_o), 0, x-x_o)/\rho$ .

**-EEH para ondas cilíndricas.** Usando **coordenadas cilíndricas** e invarianza angular pódese comprobar que esta onda LP só é exacta a orde  $1/k$  ou orde  $\lambda$ , é dicir, quedan termos de orde  $1/k^2$  (daquela, bastante pequenos) na EEH (\*), en particular

$$\frac{1}{k^2} \left\{ \frac{1}{\rho} \frac{\partial E}{\partial\rho} + \frac{\partial^2 E}{\partial\rho^2} \right\} = \frac{1}{4k^2 \rho^{5/2}} \approx 0$$



Este termo será máis desprezable canto maior sexa o valor de  $\rho$ , é dicir, canto máis radio teña a superficie de onda cilíndrica (onda LP). Logo constatamos que en efecto as ondas LP son, coma mínimo, **exactas até a orde  $1/k_o$** . Logo a solución exacta tería termos de amplitude adicionais de orde inferior a  $(1/k_o)$ , en particular de orde  $(1/k_o^2)$ . A solución exacta é a **función de Hankel  $H_o^{(1)}(\rho)$** .

(\*) Se substituímos a onda cilíndrica  $\mathcal{E}(\rho)=E(\rho) e^{ik\rho}$ , con  $E(\rho) = A_o/\rho^{1/2}$ , na EEH obtemos o seguinte resultado

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial\rho} \left( \rho \frac{\partial\mathcal{E}(\rho)}{\partial\rho} \right) + k^2 \mathcal{E}(\rho) = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial\rho} \left( \rho \frac{\partial E(\rho)}{\partial\rho} \right) e^{ik\rho} + \rho ik E(\rho) e^{ik\rho} + k^2 \mathcal{E}(\rho) = 0$$

facendo a seguinte derivada temos

$$\frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial E(\rho)}{\partial\rho} + \rho \frac{\partial^2 E(\rho)}{\partial\rho^2} + ik\rho \frac{\partial E(\rho)}{\partial\rho} + ikE(\rho) - \rho k^2 E(\rho) \right) + k^2 E(\rho) = 0$$

logo o terceiro e cuarto sumando anúlense mutuamente para  $E(\rho)=A_o/\rho^{1/2}$ , o quinto e o sexto tamén, e o primeiro e o segundo son de orde  $1/k^2$ , cqp.



## 1.6. POLARIZACIÓN LOCAL E CASE-GLOBAL [C]

### 1.6.1. POLARIZACIÓN LOCAL DE ONDAS LP

■ **Polarización local de ondas LP 3D.** A transversalidade local das ondas LP permite dotalas dunha **estrutura vectorial local**, é dicir,

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = [\mathbf{E}_n(\mathbf{r})\mathbf{u}_n(\mathbf{r}) + \mathbf{E}_b(\mathbf{r})\mathbf{u}_b(\mathbf{r})] e^{i\varphi(\mathbf{r}, t)} \quad (18)$$

con  $\varphi(\mathbf{r}, t) = k_o \mathcal{L}(\mathbf{r}) - \omega t$ , e  $\mathbf{u}_n(\mathbf{r})$ ,  $\mathbf{u}_b(\mathbf{r})$  son vectores ortogonais a  $\mathbf{s}(\mathbf{r})$  en cada punto (polarización local). Se agora definimos compoñentes normalizadas complexas  $c_n(\mathbf{r})$  e  $c_b(\mathbf{r})$ , é dicir,

$$c_{n,b}(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{E}_{n,b}(\mathbf{r})}{\mathbf{E}(\mathbf{r})}, \quad \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \sqrt{|\mathbf{E}_n(\mathbf{r})|^2 + |\mathbf{E}_b(\mathbf{r})|^2}$$

entón  $(|c_n(\mathbf{r})|^2 + |c_b(\mathbf{r})|^2)^{1/2} = 1$ , e o campo pode reescribirse en función destas compoñentes,

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{r}) [c_n(\mathbf{r})\mathbf{u}_n(\mathbf{r}) + c_b(\mathbf{r})\mathbf{u}_b(\mathbf{r})] e^{i\varphi(\mathbf{r}, t)} \equiv \mathbf{E}(\mathbf{r})\mathbf{u}(\mathbf{r}) e^{i\varphi(\mathbf{r}, t)}$$

onde

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}) = c_n(\mathbf{r})\mathbf{u}_n(\mathbf{r}) + c_b(\mathbf{r})\mathbf{u}_b(\mathbf{r})$$

Nótese que  $\mathbf{u}(\mathbf{r})$  é o vector unitario complexo da Ec. (3), onde a elección dos vectores  $\mathbf{u}_n(\mathbf{r})$  e  $\mathbf{u}_b(\mathbf{r})$  depende de cada caso (*Obs.*-En medios inhomoxéneos poden coincidir coas compoñentes normal e binormal das traxectorias ou raios de enerxía luminosa).

■ **Polarización local de ondas LP 2D.** Podemos encontrar a expresión vectorial xeral de ondas LP 2D, p.ex. invariantes en  $y$ , logo  $\mathcal{L}(x, z)$ . É doado ver que o vector de polarización xeral terá unha **compoñente global** (cte)  $\mathbf{u}_b = \mathbf{u}_y$  e unha compoñente local dada pola expresión

$$\mathbf{u}_n = (-\partial\mathcal{L}/\partial z, 0, \partial\mathcal{L}/\partial x) \perp \nabla\mathcal{L} \perp \mathbf{u}_y$$

-Por outra parte, é doado ver tamén que as compoñentes  $\mathcal{E}_x = -\mathcal{E} \partial\mathcal{L}/\partial z$  e  $\mathcal{E}_z = \mathcal{E} \partial\mathcal{L}/\partial x$  satisfacen a EEH a orde  $(1/k_o)$ . Isto exemplifica como as compoñentes das ondas LP satisfacen en boa aproximación a mesma EEO grazas á transversalidade local. En efecto, o campo pode escribirse, p.ex., como

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{r})\mathbf{u}(\mathbf{r}) e^{i[k_o\mathcal{L}(x,z) - \omega t]} = \mathbf{E}(\mathbf{r}) \left\{ -\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial z} \mathbf{u}_x + \mathbf{u}_y + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x} \mathbf{u}_z \right\} e^{i[k_o\mathcal{L}(x,z) - \omega t]}$$

logo temos efectivamente as seguintes compoñentes  $\mathcal{E}_x$  e  $\mathcal{E}_z$  do campo óptico da onda LP 2D

$$\mathcal{E}_x = \mathbf{E}(\mathbf{r}) \left( -\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial z} \right) e^{ik_o\mathcal{L}(x,z)} = \mathcal{E}(\mathbf{r}) \left( -\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial z} \right), \quad \mathcal{E}_z = \mathbf{E}(\mathbf{r}) \left( \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x} \right) e^{ik_o\mathcal{L}(x,z)} = \mathcal{E}(\mathbf{r}) \left( \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x} \right)$$

pero, en boa aproximación (de onda LP), temos as seguintes expresións para estas compoñentes

$$\mathcal{E}_x \approx -\frac{\partial\mathcal{E}}{\partial z}, \quad \mathcal{E}_z \approx \frac{\partial\mathcal{E}}{\partial x}, \quad \mathcal{E}_y = \mathcal{E}$$

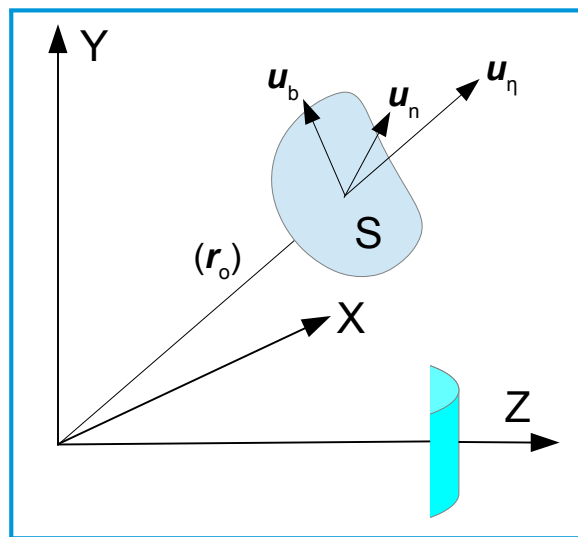
polo tanto satisfacen a mesma EEH, como se adiantou na sección 1.1. Ademais, cúmprese enmoi boa aproximación a LGE, é dicir,  $\nabla\mathcal{E} \approx 0$ .

### 1.6.2. ONDAS PARAXIAIS E POLARIZACIÓN CASE-GLOBAL

Excepto casos moi particulares as ondas LP non teñen polarización global. Porén podemos restrinxirnos a un subconxunto (trivial) delas que presentan polarización case-global. En efecto, sexan ondas LP ou **seccións S** de ondas LP (**feixes de luz**), que teñen unha dirección de propagación preferencial  $\mathbf{u}_\eta$ , é dicir,

$$\mathbf{s}(\mathbf{r}) = \nabla \mathcal{L}/n \approx \mathbf{u}_\eta, \forall \mathbf{r} \in S \quad (19)$$

logo  $\mathbf{s}(\mathbf{r})$  preto do eixo  $\eta$ , como se mostra na Figura. Isto define un tipo de ondas chamadas **paraxiais (ou case-planas)**, é dicir, ondas cuxas superficies de onda desvíanse pouco dun plano, como por exemplo as seccións de fronte de onda esféricas ou cilíndricas antes descritas. O vector unitario de polarización sería combinación lineal complexa de dous vectores ortogonais  $\mathbf{u}_n, \mathbf{u}_b$ , ortogonais á súa vez a  $\mathbf{u}_\eta$ .



-Escollamos, por simplicidade, dita dirección preferencial (eixo) como  $\eta=z$ , entón a fase desviarase pouco dun plano, en particular de **planos z**, logo admitirá unha descomposición en  $\mathcal{L}_p(\mathbf{r}) = z + \mathcal{L}_\perp(x, y, z)$  (**fase paraxial**) tal que cada compoñente de  $\nabla \mathcal{L}_\perp(\mathbf{r})$  é moito máis pequena que a unidade. E mesmo a amplitude paraxial poderá aproximarse en xeral como  $\mathbf{E}_o(\mathbf{r}) \approx \mathbf{E}_o(z)$ . Veremos exemplos máis adiante.

-Baixo esta aproximación podemos dotar á onda paraxial ou a unha **sección S** dunha **polarización case-global** representada por un vector complexo que só ten compoñentes perpendiculares a  $z$  ( $\mathbf{u}_n = \mathbf{u}_x, \mathbf{u}_b = \mathbf{u}_y$ ), de igual xeito que unha onda estritamente plana propagándose en  $z$ , é dicir,

$$\mathbf{u} \approx c_x \mathbf{u}_x + c_y \mathbf{u}_y = a_{ox} e^{i\epsilon_x} \mathbf{u}_x + a_{oy} e^{i\epsilon_y} \mathbf{u}_y$$

Daquela a expresión vectorial do campo óptico paraxial será análogo á dunha onda plana, é dicir,

$$\mathbf{E}_p = \mathcal{E}_p(\mathbf{r}) e^{-i\omega t} \approx E_p(\mathbf{r}) e^{ik_o \mathcal{L}_p(\mathbf{r})} (a_{ox} e^{i\epsilon_x} \mathbf{u}_x + a_{oy} e^{i\epsilon_y} \mathbf{u}_y) e^{-i\omega t} \quad (20)$$

*Obs.*-Toda onda paraxial pode ter polarización case-global, pero non toda onda con polarización case-global (ou global) ten que ser paraxial (lembrar as ondas cilíndricas).

**Exer.- 1 [C]** Achar a expresión xeral do vector complexo unitario (local) de polarización das seguintes ondas LP con frecuencia  $\omega$ . 1.1.-Onda  $y$ -cilíndrica LP emerxente dunha fonte lineal sita no baleiro; supóñase, p.ex.,  $\mathbf{u}_b = \mathbf{u}_y$ , con  $c_n = c_{on} e^{i\epsilon_n}$ ,  $c_b = c_{ob} e^{i\epsilon_b}$  ctes complexas. 1.2.-O mesmo para unha onda esférica diverxendo da orixe e con  $\mathbf{u}_n$  no plano  $xz$ . 1.3.-Comprobar a polarización global para seccións (case-planas) ao redor do eixo  $z$ .

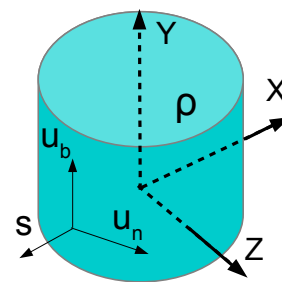
**Sol.-1.1.-**A expresión xeral dunha onda cilíndrica LP vectorial emerxente da fonte lineal no eixo  $y$  é

$$\mathbf{E}(\boldsymbol{\rho}, t) = E(\boldsymbol{\rho}) [c_{on} e^{i\epsilon_n} \mathbf{u}_n(\mathbf{r}) + c_{ob} e^{i\epsilon_b} \mathbf{u}_b(\mathbf{r})] e^{i\{k_o \rho - \omega t\}}$$

con  $E(\boldsymbol{\rho}) = A_o / \rho^{1/2}$ ,  $\rho = \sqrt{x^2 + z^2}$  e  $\boldsymbol{\rho} = (x, z)$ . O sistema ortonormal  $\{\mathbf{u}_n, \mathbf{u}_b\}$  obtense pola transversalidade. Polo tanto se  $\mathbf{u}_b = \mathbf{u}_y$ , entón  $\mathbf{u}_n(\mathbf{r})$  debe ser ortogonal a  $\mathbf{u}_y$  e ao vector  $\mathbf{s} = \nabla \mathcal{L} = (1/\rho)(x\mathbf{u}_x + z\mathbf{u}_z)$ , logo

$$\mathbf{u}_n(\mathbf{r}) = \mathbf{u}_b \wedge \nabla \mathcal{L} = (1/\rho)(z\mathbf{u}_x - x\mathbf{u}_z)$$

Nótese que se  $c_{on} = 0$ , a polarización é **global** (lineal vertical  $\forall \mathbf{r}$ ).



**Sol.-1.2.- Expresión da onda esférica.** Tendo en conta que  $\mathbf{u}_n$  está contido no plano  $xz$  e que debe ser perpendicular a  $\mathbf{s} = \mathbf{r}/r$ , entón  $\mathbf{u}_n(\mathbf{r}) = (z\mathbf{u}_x - x\mathbf{u}_z) / \sqrt{x^2 + z^2}$ , coma no caso anterior. De seguido achamos  $\mathbf{u}_b$ , é dicir,

$$\mathbf{u}_b = \mathbf{s} \wedge \mathbf{u}_n = (1/\rho r)(-xy\mathbf{u}_x + (z^2 + x^2)\mathbf{u}_y - zy\mathbf{u}_z)$$

**Sol.-1.3.-**O procedemento para comprobar a polarización case-global comeza considerando que unha sección S ao redor de  $z$  cumpre  $x, y \ll z$  (x.q.  $\partial L / \partial x, \partial L / \partial y \ll 1$ , i.e., sección case-plana). No **caso cilíndrico** (ver Figura da páx. 8) temos que  $\rho \approx z$ ,

$$\mathbf{u}_n \approx \mathbf{u}_x - (x/z)\mathbf{u}_z \approx \mathbf{u}_x, \quad \mathbf{u}_b = \mathbf{u}_y, \quad E(\rho) \approx 1/z^{1/2}$$

Nótese que rigorosamente hai unha compoñente  $z$  pero moi pequena:  $E_z \propto x/z^{3/2} \ll 1$ . Logo obtemos unha polarización **case-global** (coeficientes complexos constantes), é dicir,

$$\mathbf{u} \approx c_{on} e^{i\epsilon_n} \mathbf{u}_x + c_{ob} e^{i\epsilon_b} \mathbf{u}_y \equiv c_{ox} e^{i\epsilon_x} \mathbf{u}_x + c_{oy} e^{i\epsilon_y} \mathbf{u}_y \quad \{\mathbf{u} = (c_{ox} e^{i\epsilon_x}, c_{oy} e^{i\epsilon_y})^t\}$$

No **caso esférico** temos  $\rho \approx z$  e  $r \approx z$ , logo de novo  $\mathbf{u}_n \approx \mathbf{u}_x - (x/z)\mathbf{u}_z \approx \mathbf{u}_x$ , e ademais  $\mathbf{u}_b \approx -(xy/z^2)\mathbf{u}_x + \mathbf{u}_y - (y/z)\mathbf{u}_z \approx \mathbf{u}_y - (y/z)\mathbf{u}_z \approx \mathbf{u}_y$ , e  $E(\rho) \approx 1/z$ .

-En resumo, a aproximación de polarización global permite obter un **vector unitario** bidimensional complexo e constante (como nas ondas planas) **contido, neste caso, no plano  $\eta = z$** . Nótese que formalmente é unha aproximación de Taylor a orde cero en  $x=y=0$  (as consecuencias sobre a fase as veremos na seguinte sección).

-Daquela, todas as propiedades de polarización analizadas para ondas planas pódense usar para este tipo de ondas LP, en xeral seccións case-planas de ondas LP (ondas paraxiais, cuxa extensión transversal non ten que ser pequena).



### 1.7. PROBA DO PPIO DE FERMAT E SOLUCIÓN EIKONAL [C]

■ **Proba do Ppio. de Fermat (PF).** Lembremos que  $\nabla \mathcal{L}/n = d\mathbf{r}(s)/ds = \mathbf{r}'$ . Multiplicando por  $(d\mathbf{r})$  temos

$$\nabla \mathcal{L} d\mathbf{r} = d\mathcal{L} = n [d\mathbf{r}(s)/ds] d\mathbf{r}$$

e usando  $d\mathbf{r} d\mathbf{r} = dx^2 + dy^2 + dz^2 = ds^2$  (nótese que  $\mathbf{r}'^2 = 1$ , en consistencia con  $s^2 = 1$ ) obtemos  $d\mathcal{L} = n ds$ , logo integrando

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\mathbf{r}) &= \int_0^s n(\mathbf{r}) ds = \int_0^z n(\mathbf{r}) \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + 1} dz = \\ &= \left\{ dz = \frac{dz}{ds} ds \right\} = \int_0^s n(\mathbf{r}) \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} ds \end{aligned} \quad (21)$$

$-\mathcal{L}$  é a **Integral de Fermat (IF)**, e é achada coas traxectorias  $\mathbf{r}(s)$ , dadas polas EdR (15). Ademais  $\mathcal{L}$  ten unidades de lonxitude de camiño óptico (**LCO**):  $\mathcal{L} = c \int ds/v = ct$ . Logo as **superficies de onda** son o lugar xeométrico alcanzado polas liñas de fluxo con **igual LCO**.

$-\mathcal{L}$  é **unha extremal**. En efecto, se consideramos  $\mathcal{L}$  coma un problema variacional, as traxectorias que fan  $\delta \mathcal{L} = 0$  (**tempo extremal**) son as das EdR obtidas coas ondas LP. Isto **xustifica-proba** o PF.

■ **Solución Eikonal coa IF.** Usando a Ec. (1.7) e  $\nabla \mathcal{L} d\mathbf{r} = n ds$ , reescribimos a solución eikonal (12) en función da IF,

$$\mathcal{E} = \left( A_0 e^{-\int \frac{\nabla^2 \mathcal{L}}{2n^2} \nabla \mathcal{L} d\mathbf{r}} \right) e^{ik_0 \mathcal{L}(\mathbf{r})} = A_0 e^{-\int \frac{[\nabla^2 \int n(\mathbf{r}) ds]}{2n} ds} e^{ik_0 \int n(\mathbf{r}) ds} \quad (22)$$

**Exer.- 2 [C]** Sexa un medio homoxéneo de índice  $n_0$ . 2.1.-Achar, usando traxectorias, a fase  $\mathcal{L}(\mathbf{r})$  para o caso esférico, cilíndrico e plano. 2.2.-Sexa agora un medio inhomoxéneo  $n(z)$   $z > 0$ , e a onda  $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \exp\{ik_0 z\}$  incidindo sobre o medio, probar que a onda no dito medio vén dada pola expresión  $\mathcal{E} = (\mathcal{E}_0 / \sqrt{n(z)}) \exp\{ik_0 \int n(z) dz\}$ .

**Sol.-2.1.**- Nun medio homoxéneo  $\mathcal{L} = n_0 s$ , logo só hai que achar  $s$ . As traxectorias son as solucións de  $\mathbf{r}'' = 0$ , i.e.,

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}'_0 s + \mathbf{r}_0$$

Se  $\mathbf{r}_0$  fixo (punto fonte),  $|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^2 = (\mathbf{r}'_0)^2 s^2 = s^2 \equiv r^2$ , polo tanto  $\mathcal{L} = \pm n_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0| = \pm n_0 r$ . De igual xeito para o caso cilíndrico e plano\*. Como antes unha vez achada a fase  $\mathcal{L}$  a amplitude é doada de obter, é dicir

$$e^{-\int \frac{[\nabla^2 \int n(\mathbf{r}) ds]}{2n} ds} = e^{-\int \frac{[\nabla^2 r]}{2} dr} = \frac{1}{r}$$

**Sol.-2.2.**- Para a onda incidente  $\partial \mathcal{L} / \partial x = \partial \mathcal{L} / \partial y = 0$ , a EdR dá  $n(z) x' = n_0 x'_0 = 0$  e ademais  $n(z) y' = n_0 y'_0 = 0$  logo  $ds = dz$ , que substituído na Ec. (22) dá a expresión buscada.

\*É de interese subliñar que este procedemento conecta coa teoría de integrais de camiño (ou integración funcional) proposta por R.P. Feynman, i.e., obtención de solucións ondulatorias usando integrais de camiño.

### 1.8. EIKONAL (ÓPTICA) ELECTRÓNICA

Da Ec. de Schroedinger (ES) para partículas cargadas de enerxía  $E$  e masa  $m$  nun potencial  $V(\mathbf{r})$  (**non confinante**) obtense a solución Eikonal de partículas cargadas (Óptica de electróns, ...)

$$\nabla^2\psi + \frac{1}{\hbar^2} 2m[E - V(\mathbf{r})]\psi \equiv \nabla^2\psi + \frac{1}{\hbar^2} n_e^2(\mathbf{r})\psi = 0 \quad (23)$$

obtendo, por comparación coa EEH, o **índice de refracción (momento lineal) electrónico**, é dicir,

$$n_e(\mathbf{r}) = \sqrt{2m[E - V(\mathbf{r})]} = p_e \quad (\equiv \hbar k_e, k_e = p_e/\hbar = 2\pi/\lambda_e) \quad (\text{De Broglie})$$

Por outra banda  $k_o^{-1} = \lambda_o/2\pi \rightarrow h/2\pi = \hbar$ . Daquela obtemos unha ecuación eikonal electrónica e unha solución eikonal (tamén unha IF electrónica), é dicir,

$$(\nabla \mathcal{L}_e)^2 = n_e^2 \rightarrow \psi \propto e^{(i/\hbar)\mathcal{L}_e} \quad (\mathcal{L}_e = \int n_e(\mathbf{r}) ds = \int p_e(\mathbf{r}) \frac{d\mathbf{r}}{ds} d\mathbf{r} = \int \mathbf{p}_e(\mathbf{r}) d\mathbf{r}) \quad (24)$$

Polo tanto baixo os cambios:  $n \rightarrow n_e$ ,  $k_o^{-1} \rightarrow \hbar$  e  $\mathcal{E} \rightarrow \psi$ , temos ondas cuánticas localmente planas ou WKB (**S3**).

**Exem.**-Sexa para  $V=V_o < E$ , teríamos  $n_e$  constante e unha posible solución sería a onda esférica. No caso da luz obtivemos,  $\mathcal{E} = (A_o/r) \exp\{ik_o nr\}$ , logo no caso electrónico temos

$$\psi = (A_o/r) \exp\{in_e r/\hbar\} = (A_o/r) \exp\{ip_e r/\hbar\} = (A_o/r) \exp\{ik_e r\}$$

Obsérvase de novo que a expresión de  $k_e$  aparece por usar o número de onda, neste caso co valor  $k_e = \sqrt{2m[E - V_o]}/\hbar$ .

### 1.9. EIKONAL (ÓPTICA) GRAVITACIONAL

A luz segue as xeodésicas nulas, é dicir, cúmprese  $d\sigma^2 = ds^2 - c^2 dt^2 = 0$ , xa que  $s=ct$  (TER). Sexa un caso xeral pero simple e realista de xeometría gravitacional

$$d\sigma^2 = g_{\mu\nu} d\mu d\nu = \{\mu, \nu = x, y, z, t\} = g_s(\mathbf{r}) ds^2 - g_t(\mathbf{r}) c^2 dt^2 = 0 \quad (25)$$

logo despexando desta ecuación a LCO, definida como  $\mathcal{L}_g = \int c dt$ , obtemos

$$\mathcal{L}_g = \int c dt = \int [g_s(\mathbf{r})/g_t(\mathbf{r})]^{1/2} ds \equiv \int n_g(\mathbf{r}) ds \rightarrow (\nabla \mathcal{L}_g)^2 = n_g^2, \mathcal{E} \propto e^{ik_o \mathcal{L}_g} \quad (26)$$

onde  $n_g(\mathbf{r})$  é o **índice de refracción gravitacional** (equivalente a un medio inhomoxéneo). A solución eikonal permite o estudo da **deflexión** gravitacional da luz (ver **Exer.-3**), de **lentes gravitacionais**, da presenza de **materia escura**, etc.

-Por outra banda, a EEO obtense co operador D'Alembert (ou Laplace-Beltrami) en espazos curvos (**S4**) que para **gravidade feble** convértese na EEH con  $n=n_g$ .

**-Interacción ondas gravitacionais-luz.**-Requiren métricas anisótropas e non estacionarias, coma p.ex.,  $g_x(t)dx^2 + g_y(t)dy^2 + g_z(t)dz^2 - c^2 dt^2 = 0$ , logo

$$\mathcal{L}_g = \int \sqrt{n_x^2(t)dx^2 + n_y^2(t)dy^2 + n_z^2(t)dz^2} = \int \sqrt{d\tilde{x}^2 + d\tilde{y}^2 + d\tilde{z}^2} \quad (27)$$

con  $g_i = n_i^2$ ,  $i=x, y, z$ , logo todo se reduce a unha propagación nun espazo con **novas variables**  $\tilde{x}=n_x x$ ,  $\tilde{y}=n_y y$ , e  $\tilde{z}=n_z z$  que dan conta da contracción-dilatación do espazo (detección ondas gravitacionais con luz). **Exem.**-Ondas planas TE e TM con  $\mathbf{k} \subset xz$ .

### 1.10. MEDIO INHOMOXÉNEO FEBLE [C]

Consideremos un medio con índice de refracción (óptico, gravitacional ou electrónico)  $\{n, n_g, n_e\} = n_o + \Delta n(\mathbf{r})$  tal que  $\nabla(\Delta n) \ll 1$ , é dicir, un Medio Inhomoxéneo Feble (MIF) onde as direccións de fluxo apenas cambian. Hai moitas solucións nestes medios, p.ex., se consideramos unha onda plana en  $z$  incidindo nun MIF, entón as compoñentes da normal de onda nun plano  $z = z_o$  antes (ou lonxe) do medio son  $x'_o = y'_o = 0$  e  $z'_o = 1$ . Neste caso a variación en  $z$  non ten que ser feble e mesmo pódese ter  $n_o(z)$ . Daquela, cando esta onda plana se propaga no MIF obtemos en boa aproximación (lembrar as EdR e ver o **Exer.-2**)

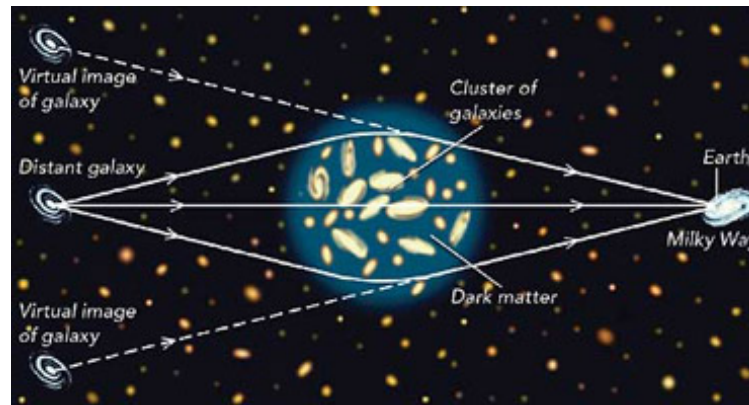
$$\frac{1}{n} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = x' \approx x'_o = 0, \quad \frac{1}{n} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = y' \approx y'_o = 0, \quad \frac{1}{n} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z} = z' \approx 1 \quad (28)$$

e daquela  $\nabla^2 \mathcal{L} \approx \partial^2 \mathcal{L} / \partial z^2 \equiv \nabla_z^2 \mathcal{L} = \partial n / \partial z$  e  $ds \approx dz$ . Polo tanto a solución aproximada no MIF, cando incide a onda plana considerada, é

$$\mathcal{E}(\mathbf{r}) \approx A_o e^{-\int \frac{\nabla_z^2 \int n(\mathbf{r}) dz}{2n} dz} e^{ik_o \int_{z_o}^z n(\mathbf{r}) dz} = [A_o / n^{1/2}(\mathbf{r})] e^{ik_o \int_{z_o}^z n(\mathbf{r}) dz} \quad (29)$$

Nótese que por ser un MIF en  $xy$  a solución é formalmente igual a dun medio  $n(z)$  (ver unha vez máis o **Exer.-2**).

**Exer.-3 [C]** Sexa o índice gravitacional  $n_g(x, z) = n_o(z) - a_o h x / (h^2 + z^2)^{3/2}$ , con  $a_o, h$  ctes tal que  $a_o h \ll 1$  (**S5**), é dicir, un MIF. Ademais supomos que  $n_o(z \rightarrow \pm\infty) = 1$ . Achar o campo óptico  $\mathcal{E}(\mathbf{r})$  resultante da interacción do campo óptico  $\mathcal{E}_1 = E_o e^{ik_o z}$ , procedente dunha fonte sita en  $z_o = -|z_o| \ll 0$ , co campo gravitacional. De seguido, achar o ángulo de **deflexión gravitacional**  $\alpha_d$  experimentada pola luz (**S5**).



Na aproximación lineal en  $x$  a solución ondulatoria eikonal (ou WKB-óptica) no campo (lente) gravitacional feble, con vectores locais  $s$  pretos da dirección  $z$  (luz incidente case-plana ao redor de  $(x, y) = (h, 0)$  e ao longo de  $z$ ), vén dada por

$$\mathcal{E}(\mathbf{r}) \approx \{E_o / \sqrt{n_g(\mathbf{r})}\} e^{ik_o \int_{z_o}^z n_g(\mathbf{r}) dz}$$

A integral faise entre un plano  $z_o \ll 0$  moi lonxe do **campo gravitacional (rexión de interacción)**, e un plano  $z$  tamén lonxe do campo. O cálculo integral está feito con detalle no Suplemento 4.

## 2. Óptica Paraxial de Discontinuidades

### 2.1. INTRODUCCIÓN ÁS ONDAS PARAXIAIS

■ **Ondas esféricas exactas.** A onda esférica **diverxente** de  $\mathbf{r}_1=(x_1, y_1, z_1)$  ( $\varphi_1 = k_1|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|$ ), e a **converxente** a  $\mathbf{r}_1=(x_1, y_1, z_1)$  ( $\varphi_1=-k_1|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|$ ), monocromáticas ( $\omega$ ), con  $k_1=k_0n_1$ , son

$$E_{1d}(x, y, z, t) = A_{o1} \frac{e^{ik_1|\mathbf{r}-\mathbf{r}_1|}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|} e^{-i\omega t}, \quad E_{1c}(x, y, z, t) = A_{o1} \frac{e^{-ik_1|\mathbf{r}-\mathbf{r}_1|}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|} e^{-i\omega t} \quad (30)$$

Podemos comprobar a verxencia destas ondas esféricas, usando coordenadas cartesianas. Sexa a superficie de onda  $\mathcal{L}_1=\varphi_1/k_0=n_1|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|$ , logo

$$\begin{aligned} \mathbf{s}_1 &= \nabla L_1/n_1 = \nabla |\mathbf{r} - \mathbf{r}_1| = \nabla \sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + (z-z_1)^2} = \\ &= (x-x_1, y-y_1, z-z_1)/|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1| = (\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)/|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1| = \mathbf{u}_{(\mathbf{r}-\mathbf{r}_1)} \end{aligned}$$

i.e., a enerxía vai de  $\mathbf{r}_1$  a  $\mathbf{r}$ , logo diverxe do punto  $\mathbf{r}_1$ . Para  $\mathcal{L}_1=-|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|$  obtemos  $\mathbf{s}_1=-\mathbf{u}_{(\mathbf{r}-\mathbf{r}_1)}=\mathbf{u}_{(\mathbf{r}_1-\mathbf{r})}$ , i.e, onda converxente a  $\mathbf{r}_1$ .

■ **Ondas paraxiais ou case-planas.** Se unha onda ten  $\nabla \mathcal{L}/n = \mathbf{s} \approx \mathbf{u}_z$ , é dicir,  $(\partial \mathcal{L}/\partial x)/n \ll 1$  e  $(\partial \mathcal{L}/\partial y)/n \ll 1$ , entón é unha paraxial (ou case-plana), i.e.,  $z$  (**eixo óptico**), sen perda de xeralidade, é a dirección preferencial de propagación da enerxía.

■ **Calculo de ondas esféricas paraxiais.** Sexa, p.ex., unha fonte puntual en  $\mathbf{r}_1=(x_1, y_1, z_1)$ ; a **aproximación  $z$ -paraxial** da correspondente onda esférica obtense considerando unha sección a **“grande” distancia  $z-z_1$** , e **“pequenas” distancias transversais** (ángulos pequenos), é dicir:  $|x-x_1|, |y-y_1| \ll |z-z_1|$  (a **sección esférica** desvíase pouco dun plano  $z$ ). A aproximación paraxial denomínase tamén **aproximación parabólica** ou de Fresnel.

-Apliquemos isto a  $E_1$ , é dicir,  $\mathcal{L}_1=n_1(z-z_1)\sqrt{[(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2]/(z-z_1)^2 + 1}$ , e por Taylor

$$\sqrt{1+\xi^2} \approx 1 + \xi^2/2 - \xi^4/8 + \dots \quad \{\xi^2=[(x-x_1)^2+(y-y_1)^2]/(z-z_1)^2\} \quad (31)$$

obtemos a orde 2 (tamén podería haber ordes superiores: 4, 6,...), a seguinte expresión espacial da onda esférica paraxial progresiva

$$\mathcal{E}_1(\mathbf{r}) \simeq \frac{A'_{o1}}{(z-z_1)} e^{ik_1z} e^{i\left\{k_1 \frac{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2}{2(z-z_1)}\right\}}, \quad A'_{o1} = A_{o1}e^{-ik_1z_1} \quad (32)$$

-O valor  $(z-z_1)$  é o chamado **radio de curvatura da onda**: distancia paraxial dende o punto de onde diverxe, ou ao onde converxe a onda, até a superficie de onda (sección).

-Para unha **onda regresiva**  $z \rightarrow -z$ , logo facémolo cambio  $\{z, z_1\} \rightarrow \{-z, -z_1\}$  na onda progresiva.

■ **Polarización case-global.** Estas ondas admiten **polarización case-global**, é dicir, a mesma que a das ondas  $z$ -planas. Facendo o cambio formal  $A_{o1} \rightarrow A_{o1}\mathbf{u}_1$ , con  $\mathbf{u}_1 \in \mathbb{C}^2$  un vector unitario complexo de polarización  $\mathbf{u}_1 \approx c_x \mathbf{u}_x + c_y \mathbf{u}_y$ ,  $c_x, c_y \in \mathbb{C}$ , temos

$$\mathcal{E}_1(x, y, z) \simeq \mathcal{E}_1(x, y, z)\mathbf{u}_1 = \frac{A'_{o1}}{(z-z_1)} e^{ik_1z} e^{i\left\{k_1 \frac{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2}{2(z-z_1)}\right\}} \mathbf{u}_1 \quad (33)$$

-É doado ver que  $\nabla \mathcal{E}_1 \approx 0$ , cúmprese en boa aproximación para todo punto  $(x, y)$  se  $(x-x_1)/(z-z_1)^2 \ll 1$ ,  $(y-x_1)/(z-z_1)^2 \ll 1$ , é dicir, onda case plana (rigorosamente precisaríase unha pequena compoñente lonxitudinal).

■ **Fase paraxial.** A fase  $\mathcal{L}_p$  da onda esférica paraxial  $\mathcal{E}_1$ , vén dada, usando a Ec. (32), pola expresión

$$\mathcal{L}_p = \varphi_1/k_o = n_1(z - z_1) + n_1 \frac{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2}{2(z - z_1)}$$

-**Superficies de fase constante.** Por simplicidade sexa  $x_1=y_1=0$ ; é doado ver, sen perda de xeralidade, que nas proximidades de  $z \approx 0 \ll |z_1|$  (calquera  $z$  cambiando o SR) a fase pódese aproximar a:  $\varphi_1 \approx k_o n_1 z - k_o n_1 (x^2 + y^2)/2z_1 - k_o n_1 z_1 = cte'$ , e daquela obtemos  $z = (x^2 + y^2)/2z_1 + cte$ , que son **paraboloides**. Nótese que  $z$  non pode tomar calquera valor, só os que aseguren a aproximación paraxial (sección da superficie de onda).

■ **Vector de Poynting e verxencia.** Achamos o **vector de Poynting paraxial**, e particularizamos para  $z_1 = -L, L > 0$ ,

$$\mathbf{s}_p = \frac{\nabla \mathcal{L}_p}{n_1} = \frac{1}{n_1} \left( \frac{\partial \mathcal{L}_p}{\partial x}, \frac{\partial \mathcal{L}_p}{\partial y}, \frac{\partial \mathcal{L}_p}{\partial z} \right) = \left( \frac{x - x_1}{z + L}, \frac{y - y_1}{z + L}, 1 - \frac{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2}{2(z + L)^2} \right)$$

Notar que  $s_z$  é aproximadamente igual a 1 (logo  $dz/ds \approx 1$ , entón  $\mathbf{s} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} \approx \left( \frac{dx}{dz}, \frac{dy}{dz}, 1 \right)$ ). O vector de Poynting unitario é, en boa aproximación,

$$\mathbf{s}_p \approx \left( (x - x_1), (y - y_1), (z + L) \right) / (z + L) \approx (\pm) \mathbf{u}_{(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)}, \quad \mathbf{r}_1 = (x_1, y_1, -L)$$

-**Analizemos:** se  $z > -L$ , i.e.,  $(z + L) > 0$ , entón  $\mathbf{s}_p = \mathbf{u}_{(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)}$ , xa que obtemos  $\mathbf{s}_p \propto (\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)$ , logo a onda é diverxente de  $\mathbf{r}_1 = (x_1, y_1, -L)$ . Se  $z < -L$ , logo  $z + L < 0$ , entón  $\mathbf{s}_p = -\mathbf{u}_{(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)}$  xa que  $\mathbf{s}_p \propto -(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)$ , e a onde é converxente a  $\mathbf{r}_1 = (x_1, y_1, -L)$ .

-**Regra do radio de curvatura.** Polo tanto a onda diverxe do punto  $(0, 0, z_1 = -L)$  para  $z > z_1$  e converxe a  $(0, 0, z_1)$  para  $z < z_1$ . Daquela extráese a **seguinte regra:** se  $(z - z_1) > 0$  a onda é diverxente, e se  $(z - z_1) < 0$  a onda é converxente.

■ **Factorización paraxial.** Unha onda  $z$ -paraxial nun medio con índice  $n = n_o$  pódese escribir como

$$\mathcal{E}(x, y, z) = e^{ik_o n_o z} E_p(x, y, z) \quad \{ = e^{ik_o n_o z} E(z) e^{ik_o \mathcal{L}_\perp(x, y, z)} \} \quad (34)$$

onde  $E_p(x, y, z)$  é a chamada amplitude paraxial que satisface a chamada Ecuación de Ondas Paraxial ou de Fresnel.

## 2.2. ECUACIÓN DE ONDAS DE FRESNEL OU PARAXIAL [C]

A onda paraxial dada pola Ec. (32) é unha solución exacta da chamada **Ecuación de Ondas de Fresnel (EOF) (ou Paraxial)**. A EOF obtense a partires da EEH na aproximación paraxial. É dicir, substituindo a expresión (34) na EEH, e desprezando o termo  $\partial^2 E_p / \partial z^2 \ll 1$  (variación lenta da amplitude en  $z$ ), obtense a EOF

$$\nabla_\perp^2 E_p + 2ik_o n_o \frac{\partial E_p}{\partial z} \simeq 0, \quad \text{con } \nabla_\perp^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad (35)$$

No caso da onda esférica paraxial (32) temos  $n_o = n_1$  logo a amplitude paraxial  $E_p(x, y, z)$  vén dada por

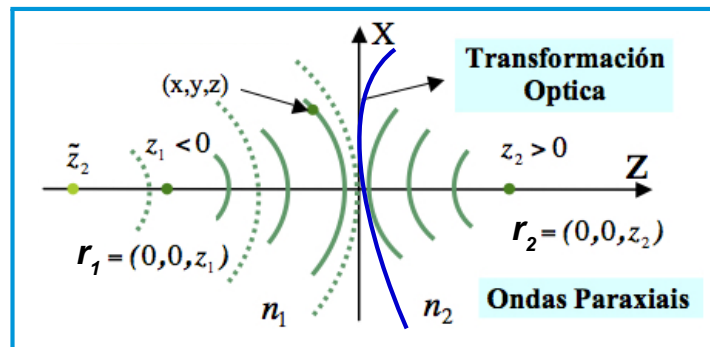
$$E_p(x, y, z) = \frac{A'_{o1}}{z - z_1} e^{i \left\{ k_1 \frac{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2}{2(z - z_1)} \right\}} \quad (36)$$

-É doado comprobar (**Exer**) por substitución que esta onda de fase cuadrática (onda esférica paraxial) satisface de forma exacta a EOF, pero só é válida na aproximación paraxial.



### 2.3. ONDAS PARAXIAIS E DISCONTINUIDADES

-Sexan dous medios dieléctricos e homoxéneos de índices  $n_1$  e  $n_2$  separados por unha **fronteira** (superficie ou discontinuidade) arbitraria (ver Figura).



-No caso de discontinuidades planas sobre as que inciden ondas planas as ondas transmitidas e reflectadas tamén son planas. No caso de ondas paraxiais incidentes semella **razonable** ter tamén ondas **paraxiais transmitidas e reflectadas**, mesmo se as fronteiras non son planas (pero paraxiais). P.ex., se as superficies son cuadráticas (ou cuárticas, etc.) as ondas tamén o deberían ser. É convinte ter expresións xerais destas ondas transmitidas e reflectadas paraxiais. Comezamos coas esféricas paraxiais.

-Sexa unha onda esférica (escalar) paraxial (progresiva) no medio  $n_1$  ( $z < 0$ ), p.ex. diverxente de  $\mathbf{r}_1 = (x_1, y_1, z_1)$  se  $z_1 < 0$ , i.e., unha onda **incidente**  $\mathcal{E}_1$  sobre a fronteira, e dada pola Ec. (32). **Supomos** que se obtén outra onda esférica paraxial **transmitida** ao medio  $n_2$ , p.ex. converxente a  $\mathbf{r}_2 = (x_2, y_2, z_2)$  se  $z_2 > 0$  (Transformación Óptica), e outra **reflectada** ao medio  $n_1$ , p.ex. converxente a  $\tilde{\mathbf{r}}_2 = (\tilde{x}_2, \tilde{y}_2, \tilde{z}_2)$  se  $\tilde{z}_2 < 0$ .

*Obs.*-Na Figura, por simplicidade, temos o caso particular  $(0, 0, z_1)$ , é dicir, un punto luminoso axial, e daquela ondas transmitidas e reflectadas tamén axiais.

**-Onda esférica paraxial transmitida.** Na aproximación paraxial a expresión da onda transmitida (progresiva) no medio  $n_2$  ( $z > 0$ ) é (obtenese, p.ex., da Ec. (30) para  $E_2$ )

$$\mathcal{E}_{2t}(x, y, z) \simeq \frac{A_{o2}}{(z - z_2)} e^{ik_2 z} e^{i\left\{k_2 \frac{(x-x_2)^2 + (y-y_2)^2}{2(z-z_2)}\right\}}, \text{ c.d.c.} \rightarrow \{A_{o2}, z_2, x_2, y_2\} \quad (37)$$

onde  $x_2, y_2, z_2$  e o factor de amplitude  $A_{o2}$  obteranse usando **condicións de continuidade** (c.d.c.) nunha superficie, discontinuidade ou fronteira entre dous medios ópticos.

**-Onda esférica paraxial reflectada.** As ondas paraxiais transmitidas son progresivas en  $z$ , entón baixo o cambio  $z, z_2 \rightarrow -z, -z_2$  na Ec. (37) obtemos unha onda reflectada ( $z < 0$ ) (neste caso regresiva). Por claridade notacional usaremos ademais  $\tilde{x}_2, \tilde{y}_2, \tilde{z}_2$ . Daquela

$$\mathcal{E}_{2r}(x, y, z) \simeq \frac{-A_{or}}{(z - \tilde{z}_2)} e^{-ik_1 z} e^{-i\left\{k_1 \frac{(x-\tilde{x}_2)^2 + (y-\tilde{y}_2)^2}{2(z-\tilde{z}_2)}\right\}}, \text{ c.d.c.} \rightarrow \{A_{or}, \tilde{z}_2, \tilde{x}_2, \tilde{y}_2\} \quad (38)$$

Coma no caso de transmisión, os valores de  $\mathbf{r}_{2r} = (\tilde{x}_2, \tilde{y}_2, \tilde{z}_2)$  e do factor de amplitude  $A_{or}$  obteranse usando **c.d.c.** na discontinuidade. É doado probar (**Exer**) que o vector de Poynting paraxial é  $\mathbf{s}_r \approx \left(-\frac{(x-\tilde{x}_2)}{z-\tilde{z}_2}, -\frac{(y-\tilde{y}_2)}{z-\tilde{z}_2}, -1\right)$ . Nótese, da Ec. (38), que a regra do radio de curvatura invírtese, p.ex., se  $z - \tilde{z}_2 > 0$  entón  $\mathbf{s}_r \propto -(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{2r})$ , é dicir, onda converxente.

**-Ondas cilíndricas paraxiais.** Podemos aplicar tamén a paraxialidade ao caso de ondas cilíndricas, p.ex., ondas  $y$ -invariantes,

$$E_1(\boldsymbol{\rho}, t) = \frac{A_{o1}}{|\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}_1|^{1/2}} e^{ik_1|\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}_1|} e^{-i\omega t} \quad (39)$$

onde  $\boldsymbol{\rho} = (x, z)$ , con  $\rho = (x^2 + z^2)^{1/2}$ , e  $\boldsymbol{\rho}_1 = (x_1, z_1)$ : **liña** luminosa localizada nese punto do plano  $xz$ , de onde diverxe (fonte lineal) ou a onde converxe (foco lineal) a onda.

-As ondas **cilíndricas paraxiais** obtéñense aplicando o mesmo procedemento que no caso das ondas esféricas, logo obtemos (neste caso  $\xi^2 = (x - x_1)^2 / (z - z_1)^2$ )

$$\mathcal{E}_1(x, z) \simeq \frac{A'_{o1}}{(z - z_1)^{1/2}} e^{ik_1 z} e^{i\left\{k_1 \frac{(x-x_1)^2}{2(z-z_1)}\right\}}, \quad A'_{o1} = A_{o1} e^{-ik_1 z_1} \quad (40a)$$

$$\mathcal{E}_{2t}(x, z) \simeq \frac{A_{o2}}{(z - z_2)^{1/2}} e^{ik_2 z} e^{i\left\{k_2 \frac{(x-x_2)^2}{2(z-z_2)}\right\}}, \quad \text{c.d.c.} \rightarrow \{A_{o2}, z_2, x_2\} \quad (40b)$$

Nótese a diferente amplitude respecto ao caso esférico paraxial. Por outra banda, para unha onda regresiva (reflectida)  $\mathcal{E}_{2r}(x, z)$ , de novo facemos o cambio formal  $k_2 \rightarrow -k_1$ . Asemade, estas ondas tamén admiten **polarización case-global**, p.ex., unha onda cilíndrica polarizada circularmente

$$\mathcal{E}_1(x, z) \simeq \frac{A'_{o1}}{(z - z_1)^{1/2}} e^{ik_1 z} e^{i\left\{k_1 \frac{(x-x_1)^2}{2(z-z_1)}\right\}} \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbf{u}_x + i\mathbf{u}_y) \quad (41)$$

**-Ondas esfero-cilíndricas paraxiais.** Finalmente, podemos considerar tamén o produto de dúas ondas cilíndricas paraxiais (salvo fase plana común), chamadas **ondas esfero-cilíndricas paraxiais** (S6-S7),

$$\mathcal{E}_1(x, y, z) \simeq A'_{o1} e^{ik_1 z} \frac{1}{(z - z_{1x})^{1/2}} e^{i\left\{k_1 \frac{(x-x_1)^2}{2(z-z_{1x})}\right\}} \frac{1}{(z - z_{1y})^{1/2}} e^{i\left\{k_1 \frac{(y-y_1)^2}{2(z-z_{1y})}\right\}} \quad (42)$$

Este tipo de ondas obtéñense de forma natural en medios anisótropos, ou usando elementos ópticos específicos (como por exemplo lentes cilíndricas). Nótese ademais que no límite  $z_{1x} = z_{1y}$  obtemos a onda esférica paraxial.

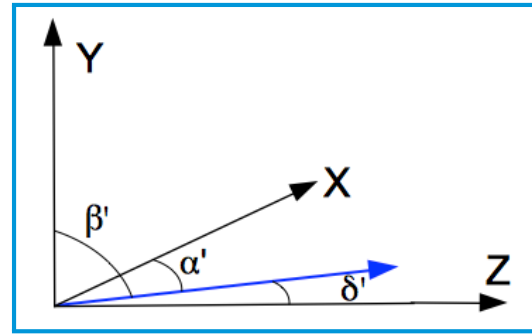
**-Ondas esféricas case-paraxiais.** Poderíamos incrementar dous ordes máis a fase da onda, é dicir, até orde cuártico, e mantendo a amplitude paraxial, o que permite introducir un exemplo de ondas case-paraxiais,

$$\mathcal{E}_1(x, y, z) \simeq \frac{A'_{o1}}{(z - z_1)} e^{ik_1 z} e^{i\left\{k_1 \frac{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2}{2(z-z_1)} - k_1 \frac{[(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2]^2}{8(z-z_1)^3}\right\}} \quad (43)$$

En xeral hai un amplo conxunto de ondas paraxiais e case-paraxiais. As primeiras verifican de xeito exacto a EOF dada pola Ec. (35) e as segundas verificana de xeito aproximado.

*Obs.* -É doado probar (por substitución) (Exer) que as ondas cilíndricas paraxiais e as ondas esfero-cilíndricas verifican de xeito exacto a EOF, igual que as esféricas paraxiais.

**-Ondas planas paraxiais.** Sexa unha onda plana exacta nun medio de índice  $n_1$  e vector de onda  $\mathbf{k} = k_0 n_1 (\cos \alpha', \cos \beta', \cos \delta')$ , onde  $\cos^2 \alpha' + \cos^2 \beta' + \cos^2 \delta' = 1$  (cosenos directores, e ángulos directores  $\alpha', \beta', \delta'$ ).



**-Aproximación paraxial.** Unha **estimación cuantitativa** da aproximación  $z$ -paraxial é  $\delta' < 15^\circ$  ( $< 0.25$  rad), e daquela  $\alpha = \pi/2 - \alpha' \ll 1$ ,  $\beta = \pi/2 - \beta' \ll 1$ , polo tanto  $\cos \alpha' \approx \alpha$  e  $\cos \beta' \approx \beta$ , onde se fixo uso de  $\cos \alpha' = \sin \alpha \approx \alpha$  e  $\cos \beta' = \sin \beta \approx \beta$  (**ángulos directores complementarios**). Logo,

$$\mathcal{E}_1(x, y, z) = E_{o1} e^{ik_1 \{ \cos \alpha' x + \cos \beta' y + \cos \delta' z \}} \simeq E_{o1} e^{ik_1 \{ \alpha x + \beta y + (1 - \frac{\alpha^2 + \beta^2}{2}) z \}} \quad (44)$$

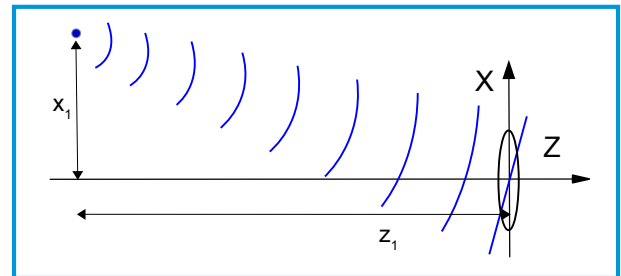
O termo cuadrático en  $\alpha$  e  $\beta$  é pequeno e colleuse por **completitude formal**. Obtense de  $\cos^2 \delta'$ , usando de novo Taylor da función raíz cuadrada  $\cos \delta' \approx \sqrt{1 - \xi^2}$ , neste caso con  $\xi^2 = \alpha^2 + \beta^2$ ,

$$\sqrt{1 - \xi^2} \approx 1 - \xi^2/2 - \xi^4/8 - \dots \approx 1 - \frac{\alpha^2 + \beta^2}{2} \quad (45)$$

-Daquela temos  $s \approx (\alpha, \beta, 1)$ . Nótese que unha **onda plana en  $z = 0$**  é igual a unha fase lineal en  $x$  e en  $y$ ; e se  $\alpha = \beta = 0$ , entón é unha constante  $E_{o1}$ .

**-Ondas planas como caso límite.** É intuitivo imaxinar unha onda plana coma o límite de ondas esféricas (ou cilíndricas) cando proceden dunha fonte sita moi lonxe da discontinuidade (ou do plano-sección de observación). Esta aproximación é moi útil, p.ex., para describir as fontes lonxanas en **astronomía óptica**.

En efecto, a expresión aproximada do campo óptico  $\mathcal{E}_1(x, y, z)$  nas proximidades de  $z \approx 0$ , procedente dun punto **fóra de eixo  $x_1$** , no límite formal  $|z_1| \gg |x|, |y|, |z|$ , e usando Taylor na orixe a orde 1, é a seguinte



$$\mathcal{E}_1 = \frac{A'_{o1}}{(z - z_1)} e^{ik_1 z} e^{i\{k_1 \frac{(x-x_1)^2 + y^2}{2(z-z_1)}\}} \approx -\frac{A'_{o1}}{z_1} e^{-ik_1 \frac{x_1^2}{2z_1}} e^{i\{k_1 \frac{xx_1}{z_1} + k_1 z (1 - \frac{x_1^2}{2z_1^2})\}} \quad (46)$$

onde usamos unha aproximación lineal da fase da onda (i.e., Taylor de 1ª orde en  $x$  e  $z$ ),

$$\frac{x^2 - 2x_1 x + x_1^2 + y^2}{2(z - z_1)} \approx \frac{-2x_1 x + x_1^2}{2(z - z_1)} \approx \frac{x_1 x}{z_1} + \frac{x_1^2 (z + z_1)}{2(z^2 - z_1^2)} \approx \frac{x_1 x}{z_1} - \frac{x_1^2 z}{2z_1^2} - \frac{x_1^2}{2z_1}$$

Obsérvese que  $\alpha \approx x_1/z_1$ , logo obtemos unha onda plana paraxial, como era de agardar, é dicir,

$$\mathcal{E}_1 = E'_o e^{i\{k_1 [\alpha x + (1 - \frac{\alpha^2}{2}) z]\}} \approx E'_o e^{i\{k_1 [\alpha x + z]\}}, \quad E'_o = -\frac{A'_{o1}}{z_1} e^{-ik_1 \frac{x_1^2}{2z_1}} \quad (47)$$

Obviamente, non é unha onda luminosa intensa. En xeral, tamén teríamos  $\beta \approx y_1/z_1$ .



## 2.4. DISCONTINUIDADES ÓPTICAS PLANAS

**-Cálculo da onda transmitida.** Sexa unha **discontinuidade plana**  $z = 0$  (**dioptrio plano**) separando medios de índices  $n_1, n_2$ . Un campo óptico de frecuencia  $\omega$ , e linealmente polarizado **case-TE** ( $\mathbf{u}_y$ ), incide sobre dela. A c.d.c. é (ver **S8** para máis detalles)

$$t_1 \mathcal{E}_1(x, y, 0) = \mathcal{E}_{2t}(x, y, 0), \quad t_1 \approx 2n_1/(n_1 + n_2) \quad (48)$$

onde se tomou o valor de  $t_1$  baixo a aproximación paraxial, é dicir, o coeficiente de Fresnel baixo incidencia case-normal. De acordo coas expresións paraxiais das ondas esféricas, temos en  $z=0$

$$t_1 (A'_{o1}/z_1) e^{-i\{k_0 n_1 \frac{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2}{2z_1}\}} = (A_{o2}/z_2) e^{-i\{k_0 n_2 \frac{(x-x_2)^2 + (y-y_2)^2}{2z_2}\}} \quad (49)$$

**i.-A c.d.c. impón a unicidade de fase**, logo igualando coeficientes dos polinomios de 2º grao na fase:

$$\text{Fase cuadrática } (x^2 + y^2): \quad \frac{n_1}{z_1} = \frac{n_2}{z_2} \Leftrightarrow \frac{z_2}{n_2} = \frac{z_1}{n_1} \Leftrightarrow z_2 = z_1 \frac{n_2}{n_1} = z_1 n_r \quad (50)$$

$$\text{Fase lineal } (x \text{ e } y): \quad x_2 = \frac{z_2}{n_2} \frac{n_1}{z_1} x_1 = m x_1, \quad y_2 = \frac{z_2}{n_2} \frac{n_1}{z_1} y_1 = m y_1 \quad (51)$$

-As Ecs. 50), (51), non son máis que as expresións xerais da **Lei de Conxugación (LdC)** a da **Lei de Aumento (LdA)** (resultados da óptica xeométrica). No caso do dioptrio plano temos  $m=1$ , é dicir,  $x_2=x_1$  e  $y_2=y_1$ .

**ii.-Igualando as amplitudes** constantes obtemos a (**moi xeral**) expresión para o f.d.a.  $A_{o2}$ ,

$$A_{o2} = t_1 A'_{o1} \frac{z_2}{z_1} = t_1 A'_{o1} n_r, \quad \left\{ \text{ou } A_{o2} = -t_1 E'_{o1} z_1 n_r, \quad \text{con } E'_{o1} = -\frac{A'_{o1}}{z_1} \right\} \quad (52)$$

-Isto non é máis que a conservación de densidade de fluxo luminoso (intensidade), é dicir,  $I_2 = n_2 |\mathcal{E}_2|^2 = T I_1 = T n_1 |\mathcal{E}_1|^2 = (n_2/n_1) |t_1|^2 I_1$ , (agás o factor  $\epsilon_0 c/2$ ), que é o que se obtén usando a Ec. (52), i.e.,  $n_2 |A_{o2}|^2/z_2^2 = T n_1 |A'_{o1}|^2/z_1^2$ .

En conclusión, a expresión da onda transmitida  $\mathcal{E}_{2t}(x, y, z, t)$ , en función dos **datos alfanuméricos** ( $t_1, z_1, A'_{o1}, n_1, n_2, k_0=2\pi/\lambda_0$ ), é

$$\mathcal{E}_{2t}(\mathbf{r}, t) = \frac{A_{o2} e^{ik_0 n_2 z}}{(z - z_2)} e^{i\{k_0 n_2 \frac{(x-x_2)^2 + (y-y_2)^2}{2(z-z_2)}\}} = t_1 \frac{n_r A'_{o1} e^{ik_0 n_2 z}}{(z - z_1 n_r)} e^{i\{k_0 n_2 \frac{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2}{2(z-z_1 n_r)}\}} \quad (53)$$

**-Estudo da verxencia.** Para analizar a **verxencia en  $z>0$**  (despois da discontinuidade) achamos o vector unitario de Poynting

$$\mathcal{E}_{2t}(\mathbf{r}) = \frac{A_{o2} e^{ik_0 n_2 z}}{(z - z_1 n_r)} e^{i\{k_0 n_2 \frac{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2}{2(z-z_1 n_r)}\}}, \quad \mathbf{s}_p = \frac{\nabla \mathcal{L}_p}{n_2} \approx \left( \frac{x - x_1}{z - z_1 n_r}, \frac{y - x_1}{z - z_1 n_r}, 1 \right) \quad (54)$$

Se  $z_1 < 0$  (onda incidente diverxente de  $z_1$ ):  $\mathbf{s}_p \approx (x-x_1, y-y_1, z-z_1 n_r)/(z-z_1 n_r) \approx \mathbf{u}_{(r-r_2)}$  a onda é diverxente. Pero se  $z_1 > 0$  (onda **incidente converxente** ou fonte virtual) entón a onda será converxente  $\forall z < z_1 n_r$ , x.q.  $\mathbf{s}_p \approx -\mathbf{u}_{(r-r_2)} = \mathbf{u}_{(r_2-r)}$ ; e será diverxente  $\forall z > z_1 n_r$ .

-Obsérvese ademais o **salto abrupto de fase**  $e^{i\pi}$  (fase topolóxica) no paso por  $z=n_r z_1$  (singularidade óptica).

**Exer.- 4** Sexan dous medios de índices  $n_1 = 1$  e  $n_2 = n_o$  separados pola superficie  $z=0$ . 4.1.-Usando c.d.c. acha-la expresión da onda  $\mathcal{E}_2(x, y, z)$  refractada cando o campo incidente  $\mathcal{E}_1(x, y, z)$  procede dun punto luminoso sito a unha distancia  $L$  á esquerda da discontinuidade e en  $(x_1, y_1)=(a, 0)$ ; o factor de amplitude é  $A_{o1}$ . 4.2.-Analizar a onda transmitida (é dicir, achar o vector de onda local e analizar verxencia).

**Sol.-4.1.** É un **caso particular do caso xeral** visto antes con  $z_1 = -L$ ,  $x_1 = a$ ,  $y_1 = 0$ ,  $n_1 = 1$  e  $n_2 = n_o$ , daquela

$$\frac{2}{(1+n_o)} \frac{A'_{o1}}{L} e^{-i\{k_o \frac{[(x-a)^2+y^2]}{2(-L)}\}} = -\frac{A_{o2}}{z_2} e^{-i\{k_o n_o \frac{[(x-x_2)^2+(y-y_2)^2]}{2z_2}\}}$$

onde  $A'_{o1} = A_{o1} e^{ik_o L}$ . Por inspección da c.d.c., obtemos os valores de  $z_2$ ,  $x_2$  e  $y_2$  que fan as exponenciais iguais:  $z_2 = (n_2/n_1)z_1 = -n_o L$ ,  $x_2 = a$ ,  $y_2 = 0$ , logo,  $\mathbf{r}_2 = (a, 0, -n_o L)$ .

Da igualdade das constantes de amplitude obtense a expresión do factor de amplitude  $A_{o2}$ . Usando ademais o valor obtido para  $z_2$ , obtense

$$A_{o2} = t_1 A'_{o1} \frac{z_2}{z_1} = -\frac{2}{(1+n_o)} \frac{A'_{o1}}{L} z_2 = t_1 A'_{o1} n_o = t_1 E'_{o1} L n_o \quad \{E'_{o1} = \frac{A'_{o1}}{L}\}$$

a constante  $E'_{o1}$  é para enfatizar as unidades de campo óptico (se fose de interese). Polo tanto substituíndo os valores obtidos  $z_2 = -n_o L$ ,  $x_2 = a$ ,  $y_2 = 0$  e  $A_{o2} = t_1 E'_{o1} L n_o$  na expresión xeral do campo óptico transmitido obtemos

$$\mathcal{E}_{2t}(x, y, z) = t_1 \frac{n_o A'_{o1}}{(z+n_o L)} e^{ik_o n_o z} e^{i\{k_o n_o \frac{[(x-a)^2+y^2]}{2(z+n_o L)}\}}$$

**Sol.-4.2.** O vector de onda local é  $\mathbf{k}_2 = k_o \nabla \mathcal{L}_p$ , onde  $\nabla \mathcal{L}_p = n_o \mathbf{s}$ , é dicir, temos o vector de Poynting

$$\mathbf{s} = \frac{\nabla \mathcal{L}_p}{n_o} \approx \left( \frac{(x-a)}{(z+n_o L)}, \frac{y}{(z+n_o L)}, 1 \right) = \frac{(x-a, y, z+n_o L)}{(z+n_o L)} \approx \mathbf{u}_{(\mathbf{r}-\mathbf{r}_2)}$$

polo tanto é unha onda diverxente virtualmente de  $\mathbf{r}_2 = (a, 0, -n_o L)$  (**virtual**: “todo parece como se” procedera dese punto).

**-Varias discontinuidades planas. [C]** Este resultado é doado xeralizalo a varias discontinuidades planas. P.ex., sexan 2 discontinuidades separadas unha distancia  $d_1$ , enton tendo en conta o resultado da Ec. (53) obteríamos

$$\mathcal{E}_{3t}(\mathbf{r}, t) = t_1 t_2 \frac{z_{2(1)} z_{2(2)}}{z_{1(1)} z_{1(2)}} \frac{A'_{o1} e^{ik_o n_2 d_1}}{(z-z_{2(2)})} e^{ik_o n_3 z} e^{i\{k_o n_3 \frac{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2}{2(z-z_{2(2)})}\}} \quad (55)$$

onde o subíndice con paréntese denota a discontinuidade plana considerada. Nótese tamén que a LdC é sempre a mesma, é dicir,  $z_{2(1)}/z_{1(1)} = n_2/n_1$ ,  $z_{2(2)}/z_{1(2)} = n_3/n_2$ , logo o produto deses factores na amplitude simplifícase a  $n_3/n_1$ . A xeralización a  $N$  discontinuidades é inmediata,

$$\mathcal{E}_{N+1t}(\mathbf{r}, t) = t_1 \dots t_N \frac{n_{N+1}}{n_1} \frac{A'_{o1} e^{ik_o \Delta}}{(z-z_{2(N)})} e^{ik_o n_{N+1} z} e^{i\{k_o n_{N+1} \frac{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2}{2(z-z_{2(N)})}\}} \quad (56)$$

onde  $\Delta = n_2 d_1 + \dots + n_{N-1} d_N$ . Daquela, todo se reduce a achar o valor de  $z_{2(N)}$ , como ilustraremos no Exer.-5.

**Exer.- 5** Sexan tres medios de índices  $n_1 = 1$  e  $n_2 = n_o$   $n_3 = 1$  separados polas superficies  $z=0$  e  $z=d_1$  (lámina plano-paralela). Sexa unha onda procedente do punto luminoso sito en  $(a, 0, -L)$ . Achar a expresión do campo óptico transmitido. Fágase tamén para onda plana incidente de amplitude  $E_o$  e propagándose na dirección paraxial  $(\alpha, 0, 1)$ .

**Sol.-**A primeira discontinuidade está resolta no **Exer. 4**, logo só hai que resolver a 2ª discontinuidade, é dicir, débese cumprir  $t_2 \mathcal{E}_{2t}(x, y, d_1) = \mathcal{E}_{3t}(x, y, d_1)$ ,

$$t_2 \mathcal{E}_{2t}(x, y, d_1) = t_1 t_2 \frac{n_o A'_{o1} e^{ik_o n_o d_1}}{(d_1 + n_o L)} e^{i\{k_o n_o \frac{[(x-a)^2 + y^2]}{2(d_1 + n_o L)}\}} = -\frac{A_{o3}}{z_3} e^{-i\{k_o \frac{[(x-x_3)^2 + (y-y_3)^2]}{2z_3}\}}$$

Obsérvese que  $\mathcal{E}_{3t}(x, y)$  está referido a un SR coa orixe en  $(0, 0, d_1)$ , é dicir,  $xy\eta$ , con  $\eta=0$ , inda que normalmente  $\eta$  se volve a denotar como  $z$ .

-É certo que o campo incidente sobre  $z=d_1$  está referido a un SR coa orixe en  $(0, 0, 0)$  pero o **valor do campo** en calquera plano é **independente do SR** escollido. En efecto, se escribimos o campo incidente  $\mathcal{E}_{2t}$  respecto ao novo SR  $\eta=z-d_1$ , logo  $z=\eta+d_1$ , temos

$$\mathcal{E}_{2t}(x, y, \eta) t_1 \frac{n_o A'_{o1} e^{ik_o n_o d_1}}{(\eta + d_1 + n_o L)} e^{i\{k_o n_o \frac{[(x-a)^2 + y^2]}{2(\eta + d_1 + n_o L)}\}}$$

Pero a discontinuidade  $z=d_1$  no novo SR está en  $\eta=0$ , logo obtemos o mesmo valor do campo. En resumo, en **Óptica debe usarse a última discontinuidade** coma orixe da coordenada  $z$ , xa que as LdC e outros parámetros son dados (convenio) respecto a esa última discontinuidade. Ademais, fisicamente é mellor medir a onda de saída respecto á última discontinuidade.

-Voltando agora á c.d.c. entre a segunda e a terceira onda obtemos os parámetros buscados:  $x_3=a, y_3=0; z_3=-(d_1 + n_o L)/n_o = -d_1/n_o - L; A_{o3}=t_1 t_2 A'_{o1} e^{ik_o n_o d_1}$

Nótese que o f.d.a. non depende de  $z_3/z_2$ , polo tanto a onda transmitida ao medio 3 vén dada pola seguinte expresión

$$\mathcal{E}_{3t}(x, y, z) = t_1 t_2 \frac{A'_{o1} e^{ik_o n_o d_1}}{(z + d_1/n_o + L)} e^{ik_o z} e^{i\{k_o \frac{[(x-a)^2 + y^2]}{2(z + d_1/n_o + L)}\}}$$

-Para o caso de **iluminación plana** abonda con usar ondas planas z-paraxias. (**Exer**)

**-Cálculo usando LdC. [C]** Imos agora, **por completitude, aplicar a expresión xeral** obtida para múltiples discontinuidades planas, é dicir,

$$\mathcal{E}_{3t}(\mathbf{r}, t) = t_1 t_2 \frac{n_o}{1} \frac{1}{n_o} \frac{A'_{o1} e^{ik_o n_o d_1}}{(z - z_{2(2)})} e^{ik_o z} e^{i\{k_o \frac{(x-a)^2 + (y-0)^2}{2(z - z_{2(2)})}\}}$$

Só hai que achar  $z_{2(2)}$  usando a LdC de discontinuidades planas e unha regra de concatenación entre as posicións  $z_2$  e  $z_1$  de discontinuidades consecutivas. Na primeira discontinuidade temos  $z_{2(1)} = (n_2/n_1)z_{1(1)} = (n_o/1)(-L) = -n_o L$ . Agora precisamos achar  $z_{2(2)}$  a partires de  $z_{1(2)}$ , a cal debe se calculada tendo en conta a separación  $d_1$  entre as discontinuidades, é dicir,  $z_{1(2)} = -(d_1 - z_{2(1)}) = -d_1 + z_{2(1)} = -d_1 - n_o L$ .

-Finalmente, usando  $z_{1(2)}$  na LdC para a segunda discontinuidade obtemos o valor buscado, é dicir,  $z_{2(2)} = (n_3/n_2)z_{1(2)} = (1/n_o)(-d_1 - n_o L) = -d_1/n_o - L$  Se houberse máis discontinuidades planas procederíase de igual xeito, sen necesidade de aplicar as c.d.c.

## 2.5. ONDAS -FEIXES- ESFÉRICAS GAUSSIANAS

■ **Forma Complexa dunha Onda Gaussiana.** Sexa a onda esférica paraxial dada pola Ec. (32), con  $k_1 = k_o$ , por simplicidade. Facendo a transformación formal ao **dominio complexo** do parámetro  $z_1$  obtense o parámetro complexo

$$z_1 \rightarrow z_1 + iz_{o1} \quad (57)$$

con  $z_{o1} = z_R \geq 0$  a chamada **lonxitude de Rayleigh** (como veremos é unha distancia sen diverxencia significativa), obtense unha nova solución paraxial,

$$\mathcal{E}_1(\mathbf{r}) = \frac{A'_{o1} e^{ik_o z}}{(z - z_1 - iz_{o1})} e^{i\{k_o \frac{(x^2+y^2)}{2(z-z_1-iz_{o1})}\}} = \frac{A_{og} e^{-ik_o z_1}}{q_1} e^{ik_o z} e^{i\{k_o \frac{(x^2+y^2)}{2q_1}\}} \quad (58)$$

con  $q_1 = (z - z_1 - iz_{o1})$ . A Ec. (58) é a expresión dunha onda (feixe) Gaussiana esférica en **forma complexa** con radio de curvatura complexo  $q_1$  (pódese comprobar, por substitución, que o campo Gaussiano é unha solución exacta da EOF).

■ **Forma Normal dunha Onda Gaussiana.** Da *forma complexa* (58), separamos a parte real e imaxinaria do factor  $1/q_1 = 1/[(z - z_1) - iz_{o1}] = [(z - z_1) + iz_{o1}]/[(z - z_1)^2 + z_{o1}^2]$ , logo  $1/q_1 = 1/R_1(z) + i/k_o w_1^2(z)$ . Usando ademais a forma polar no denominador da amplitude, é dicir,  $q_1 = -i[(z - z_1)^2 + z_{o1}^2]^{1/2} \exp\{i \operatorname{atn}[(z - z_1)/z_{o1}]\}$ , obtemos da Ec. (58) a **forma normal**,

$$\mathcal{E}_1(x, y, z) = \frac{iA'_{o1} e^{-i\phi_G(z)}}{[(z - z_1)^2 + z_{o1}^2]^{1/2}} e^{ik_o z} e^{ik_o \frac{(x^2+y^2)}{2R_1(z)}} e^{-\frac{(x^2+y^2)}{2w_1^2(z)}} \quad (59)$$

$$\phi_G(z) = \operatorname{atn}\left(\frac{z - z_1}{z_{o1}}\right), \quad R_1(z) = \frac{(z - z_1)^2 + z_{o1}^2}{z - z_1}, \quad w_1^2(z) = \frac{(z - z_1)^2 + z_{o1}^2}{k_o z_{o1}} \quad (60)$$

onde  $\phi_G(z) \in [-\pi/2, \pi/2]$  é a chamada **fase de Gouy**. A función  $w_1^2(z)$  define unha **semianchura significativa** da Gaussiana. Tamén se usa  $W_1(z) = \sqrt{2}w_1(z)$ . En xeral  $\forall z \neq z_1$  é unha onda esférica paraxial con amplitude Gaussiana de semianchura **non mínima**.

-**Semianchura mínima (waist).** Sexa  $w_1(z=z_1) = w_o = (z_{o1}/k_o)^{1/2}$ , que é, segundo a Ec. (60), a semianchura mínima (ou *waist*) do feixe, logo  $z_{o1} = z_R = k_o w_o^2$ . Asemade  $W_o = 2^{1/2} w_o$ , entón

$$W_o = 2^{1/2} w_o = 2^{1/2} (z_{o1}/k_o)^{1/2} = 2^{1/2} (z_R/k_o)^{1/2} \quad (61)$$

-Entón no plano  $z = z_1$  obtemos unha onda Gaussiana con **fase plana** e unha amplitude Gaussiana de anchura mínima. En particular, da Ec. (58) ou (59) obtemos nese plano

$$\mathcal{E}_1(x, y, z_1) = \frac{A'_{o1} e^{i\pi/2}}{k_o w_o^2} e^{ik_o z_1} e^{-\frac{(x^2+y^2)}{2w_o^2}} \equiv \frac{2A_{og} e^{i\pi/2}}{k_o W_o^2} \cdot 1 \cdot e^{-\frac{(x^2+y^2)}{W_o^2}} \quad (62)$$

logo a fase é plana e a amplitude é Gaussiana de semianchura mínima  $W_o$ . Nótese que o valor  $w_o$  é a **distanza radial** á cal decae a intensidade ( $I_1 \propto |\mathcal{E}_1|^2$ ) máxima a  $1/e$ , e  $W_o$  a  $1/e^2$ .

-Tamén, en boa aproximación, as ondas Gaussianas admiten **polarización case-global**, é dicir,  $\mathcal{E}_1(\mathbf{r}) \simeq \mathcal{E}_1(\mathbf{r})\mathbf{u}$ .



■ **Análise da Intensidade.** Achando a intensidade (‘reducida’) do campo dado pola Ec. (59) obtense

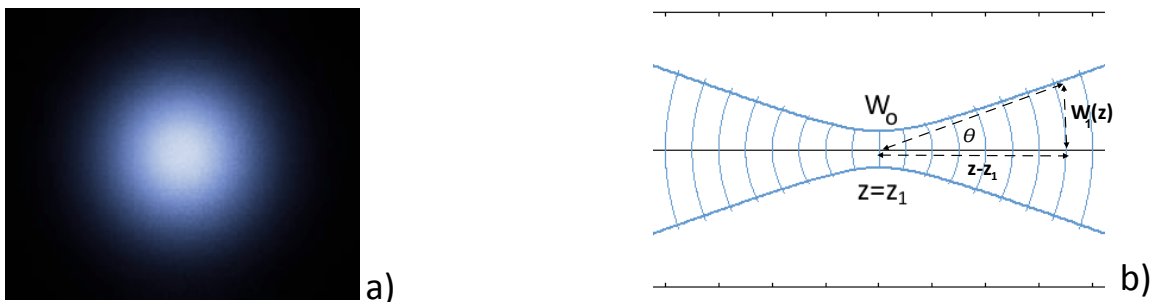
$$I_1(x, y, z) = |\mathcal{E}_1(x, y, z)|^2 = \frac{|A_{og}|^2}{(z - z_1)^2 + z_{o1}^2} e^{-\frac{(x^2+y^2)}{w_1^2(z)}} \quad (63)$$

-Ao longo do eixo  $z$ , i.e., para  $(x, y)=(0, 0)$ , é unha función **Lorentziana**, con máximo en  $z=z_1$ . Como sabemos nese plano  $W_1(z=z_1)=W_o=\sqrt{2}w_o$  é mínimo, logo hai **máxima concentración de enerxía**. Estas son ondas-feixes típicas de **cavidades ópticas**, **fibras ópticas**, **láseres** (modo espacial fundamental **TEM<sub>00</sub>**), etc.

-Nótese tamén que  $z_{o1}=z_R$  é a distancia á cal a intensidade decae á metade do seu valor dende o plano de fase plana  $z=z_1$ , é dicir, en  $z=z_1+z_R$ ,  $I(0, 0, z_1+z_R)=|A_{og}|^2/2z_R^2$ .

-**No límite**  $(z-z_1) \gg z_{o1}$ , obtense unha onda esférica uniforme que semella proceder de  $z \simeq z_1$ , con radio de curvatura  $R_1(z) \simeq (z - z_1)$ ,  $w_1 = W_1/\sqrt{2} \gg 1$  e  $\phi_G \simeq \pi/2$ .

-**Análise gráfico.** Na Fig. a) móstrase a imaxe dunha onda ou feixe láser azul, descrito polo campo Gaussiano  $I_1(r)$  da Ec. (63) (modo **TEM<sub>00</sub>**), nun plano  $z$  (nótese tamaño “finito”). Na Fig. b) simúlase a propagación converxente e diverxente do feixe usando a función  $W_1(z) = \sqrt{2} w_1(z)$ , coma **fronteira significativa** da enerxía do feixe.



-As fronteiras de onda presentan un **radio de curvatura variable** coa distancia  $z$  (ver Figura), i.e.,  $R_1(z)=[(z - z_1)^2 + z_{o1}^2]/(z - z_1)$  (liñas de fluxo **non rectilíneas**), dende un valor infinito en  $z=z_1$  (fronte plana) até un valor asíntotico  $z-z_1$  **para**  $z \gg z_1$ .

-Asemade baixo propagación alcánzase unha **diverxencia**  $\theta$  constante. En efecto, tendo en conta  $W_1(z)=\sqrt{2} w_1(z)$ , entón no límite  $(z-z_1) \gg z_{o1}$ , obtense dito ángulo  $\theta$ ,

$$\theta = \lim_{(z-z_1) \gg z_{o1}} \frac{\sqrt{2} w_1(z)}{(z - z_1)} = \lim_{(z-z_1) \gg z_{o1}} \frac{\sqrt{2} [(z - z_1)^2 + z_{o1}^2]^{1/2}}{\sqrt{k_o z_{o1}} (z - z_1)} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{k_o z_R}} = \frac{\lambda_o}{\pi W_o} \quad (64)$$

onde usamos  $z_{o1}=z_R=k_o w_o^2=k_o W_o^2/2$ . Se a lonxitude de Rayleigh  $z_R$  aumenta, entón  $\theta$  diminúe, logo  $z_R$  ( **$W_o$  ou  $w_o$** ) **caracteriza a diverxencia** (difracción) da Gaussiana. Asemade, se  $\lambda_o$  aumenta tamén o fai  $\theta$  e viceversa (comportamento ondulatorio **difractivo**).

-Finalmente, indicar que isto explica, en parte, o **tamaño finito** das ondas emitidas por fontes **case-puntuais**.

**Exer.- 6** -Achar o vector de onda local dunha onda Gaussiana con  $z_1=0$  nun plano arbitrario  $z$ , e analizar o resultado. Finalmente, xustificar que as liñas de fluxo de enerxía veñen descritas por  $w_1(z)$ , é dicir,  $x(z) = x_o w_1(z)/w_o$ .

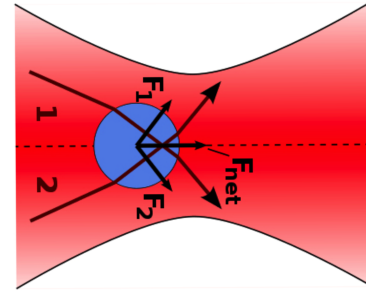
**Sol.-** Lémbrese que o vector de onda local e daquela as liñas de fluxo obtéñense da (superficie) fase da onda. No caso de ondas Gaussianas  $\mathcal{L}=z+(x^2+y^2)/2R_1(z)$ . A contribución da fase de Gouy ao vector de onda é desprezable xa que vai con  $\phi_G(z)/k_o$ .

**-Pinzas ópticas (Premio Nobel 2018).** [C] **Potencial óptico:** tendo en conta que a enerxía potencial dipolar é  $U = \epsilon r \cdot E$ , e que por ILM clásica obtemos  $\epsilon r = -\alpha E$ , entón en  $\langle \rangle_t$  temos  $U_t = -(\alpha/2)|\mathcal{E}(x, y, z)|^2 = -(\alpha/2)I(x, y, z)$ , é dicir, un pozo de potencial. No caso Gaussiano, ver Ec. (63) e Figura, obtemos

$$U_t = -(\alpha/2) \frac{|A_{og}|^2}{(z - z_1)^2 + z_{o1}^2} e^{-\frac{(x^2+y^2)}{(z-z_1)^2+z_{o1}^2}}$$

é dicir, na dirección transversal o potencial luminoso é Gaussiano, e na lonxitudinal ( $z$ ) é Lorentziano (máis ancho, logo menos confinante), con un valor mínimo no punto  $(x, y, z) = (0, 0, z_1)$  (p.e.,  $z_1 = 0$ ).

**Obs.-**Na Figura tamén se mostra que é posible describir o atrapamento dunha micropartícula cun modelo de cambio de momento lineal (ver Figura), porén, para nanopartículas hai que usar o modelo de pozo de luz anterior. Pódese explicar considerando conservación do momento lineal. A luz incide cun momento  $p \propto k$  e sae con outro, logo a diferenza é transferida á micropartícula.



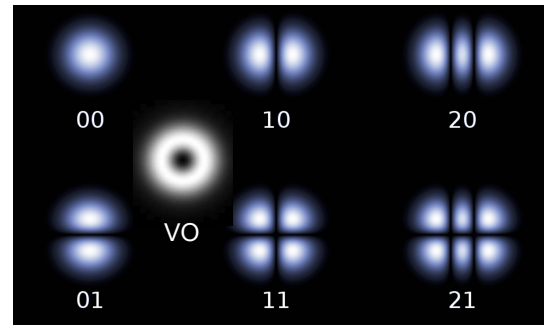
**2.6. ONDAS -FEIXES- HERMITE-GAUSS**

Outras solucións da EOF son as **derivadas das Gaussians**, p.ex., en  $x, y, x$  e  $y$ , tendo ondas H-G (Hermite-Gauss) de ordens 10, 01 e 11 (**ceros das funcións en  $x$  e  $y$** ). Logo por derivación de  $\mathcal{E}_{(00)}(\mathbf{r}) = A'_o \psi_{00}(\mathbf{r}) = A'_o (1/q_1) e^{ik_oz} \exp\{ik_o \frac{(x^2+y^2)}{2q_1}\}$ , temos, salvo ctes,

$$\mathcal{E}_{(10)}(\mathbf{r}) = A'_o (x/q_1) \psi_{00}(\mathbf{r}); \mathcal{E}_{(01)}(\mathbf{r}) = A'_o (y/q_1) \psi_{00}(\mathbf{r}); \mathcal{E}_{(11)}(\mathbf{r}) = A'_o (xy/q_1^2) \psi_{00}(\mathbf{r}) \quad (65)$$

Nótese que, xa que  $q_1 \propto e^{-i\phi_G}$ , temos fases de Gouy:  $\phi_{10} = \phi_{01} = 2\phi_G(z)$ ,  $\phi_{11} = 3\phi_G(z)$ .

Estes son campos (feixes) ópticos xerados, p.ex., en cavidades láser, tamén en fibras ópticas, etc. Chámanse **modos ópticos transversais (ou espaciais)**. Na Figura móstranse campos H-G no plano  $z = z_1$  (fase plana). Nótese que, en efecto, os subíndices indican o número de ceros nas dirección  $x$  e  $y$ , respectivamente.



**-Transporte de Momento Angular Orbital (MAO).** A superposición  $\mathcal{E}_{\pm 1} = \mathcal{E}_{(10)}(\mathbf{r}) \pm i\mathcal{E}_{(01)}$  dá os chamados **vórtices ópticos (vo)** (ver Figura) con MAO  $l = \pm 1$ ,

$$\mathcal{E}_{\pm 1} = A'_o (x \pm iy) (1/q_1^2) e^{ik_oz} e^{i\{k_o \frac{(x^2+y^2)}{2q_1}\}} = A'_o \rho e^{\pm i\varphi} (1/q_1^2) e^{ik_oz} e^{i\{k_o \frac{\rho^2}{2q_1}\}} \quad (66)$$

$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ ,  $\varphi = \text{atn}(y/x)$ . Nótese que o operador diferencial MAO (**compoñente  $z$** ) dá  $-i\partial\mathcal{E}_{\pm 1}/\partial\varphi = \pm\mathcal{E}_{\pm 1}$  (semellante a  $-i\partial e^{ik_oz}/\partial z = k_o e^{ik_oz}$ , i.e., ao Momento Lineal).

**-Microscopía STED (Premio Nobel 2014).** [C] Xa que nun vo a intensidade é nula no centro (punto escuro), permite a cancelación selectiva de fluorescencia ou emisión espontánea (*em.esp.*) (“lenta”) por emisión estimulada (*em.est.*), i.e., excitación electrónica con  $\psi_{00}$  e seguido de desexcitación selectiva por *em.est.* con , p.ex.,  $\mathcal{E}_{+1}$ , logo só no centro hai *em.esp.*



**Exer.- 7** Sexa un feixe Gaussiano de amplitude  $A_{og}$  propagándose no baleiro con parámetro complexo  $z_1 + iz_{o1}$ . 7.1.-Se incide sobre unha superficie plana  $z = 0$  de separación cun medio de índice  $n=n_o$ , achar a expresión complexa e normal do feixe Gaussiano transmitido. 7.2.-Fágase tamén para a onda Hermite-Gauss  $\psi_{10} = (x/q)\psi_{00}$ .

**Sol.-7.1.**-Usando c.d.c. en  $z = 0$  do feixe Gaussiano incidente co transmitido en forma complexa, temos

$$\frac{t_1 A'_{o1}}{(z_1 + iz_{o1})} e^{-i\{k_o \frac{(x^2+y^2)}{2(z_1+iz_{o1})}\}} = \frac{A_{o2}}{(z_2 + iz_{o2})} e^{-i\{k_o n_o \frac{(x^2+y^2)}{2(z_2+iz_{o2})}\}}$$

onde  $A'_{o1} = A_{og} e^{-ik_o z_1}$ , logo da igualdade das Gaussianas complexas obtemos a seguinte relación

$$z_2 + iz_{o2} = n_o(z_1 + iz_{o1})$$

logo  $z_2 = n_o z_1$  e  $z_{o2} = n_o z_{o1}$ , e da igualdade de amplitudes  $A_{o2} = t_1 n_o A'_{o1}$ . Daquela, obtemos o seguinte feixe Gaussiano en forma complexa

$$\mathcal{E}_{2t}(x, y, z) = \frac{t_1 n_o A'_{o1} e^{ik_o n_o z}}{[z - n_o(z_1 + iz_{o1})]} e^{i\{k_o n_o \frac{(x^2+y^2)}{2[z - n_o(z_1 + iz_{o1})]}\}}$$

Nótese que é menos diverxente xa que  $z_R = z_{o2} = n_o z_{o1} > z_{o1}$ , é dicir, un medio material reduce a diverxencia do feixe.

-Agora escribimos a **forma normal**, como fixemos no caso xeral na Ec. (59). Comezamos usando o radio de curvatura complexo  $q_2 = [(z - n_o z_1) - in_o z_{o1}]$ , polo tanto con módulo  $|q_2| = \sqrt{(z - n_o z_1)^2 + n_o^2 z_{o1}^2}$ . Daquela, racionalizando na exponencial obtemos a expresión  $q_2^*/|q_2|^2 = [(z - n_o z_1) + in_o z_{o1}]/|q_2|^2$ , e na amplitude da Gaussiana usamos a forma polar  $q_2 = -i|q_2| \exp\{iatn[(z - n_o z_1)/(n_o z_{o1})]\}$ , polo tanto escribimos

$$\mathcal{E}_{2t}(x, y, z) = i \frac{t_1 n_o A'_{o1}}{|q_2|} e^{-i\phi_{G2}} e^{ik_o n_o z} e^{i\{k_o n \frac{(x^2+y^2)(z - n_o z_1)}{2|q_2|^2}\}} e^{-k_o n_o^2 z_{o1} \frac{(x^2+y^2)}{2|q_2|^2}}$$

onde  $\phi_{G2} = atn\{(z - n_o z_1)/n_o z_{o1}\} \equiv atn\{(z - z_2)/z_{o2}\}$ . Nótese que en  $z = n_o z_1$ , se  $z_1 > 0$ , temos un máximo de intensidade en eixo. Asemade,  $R_2(z) = |q_2|^2/(z - n_o z_1)$ , e a semi-anchura  $w_1^2(z) = |q_2|^2/(k_o n_o^2 z_1)$

**Sol.-7.2.**-No caso H-G obtéñense os mesmos valores dos parámetros  $z_2$  e  $z_{o2}$  (logo  $q_2$ ) que no caso Gaussiano excepto a constante de amplitude que neste caso tomará o valor  $A_{o2} = t_1 n_o^2 A'_{o1}$ , en efecto,

$$\frac{t_1 A'_{o1}}{(z_1 + iz_{o1})^2} x e^{-i\{k_o \frac{(x^2+y^2)}{2(z_1+iz_{o1})}\}} = \frac{A_{o2}}{(z_2 + iz_{o2})^2} x e^{-i\{k_o n_o \frac{(x^2+y^2)}{2(z_2+iz_{o2})}\}}$$

É obvio que de novo  $z_2 + iz_{o2} = n_o(z_1 + iz_{o1})$ , pero no denominador da amplitude da Gaussiana temos  $q_2^2$ , de aí  $A_{o2} = t_1 n_o^2 A'_{o1}$ . Logo o campo óptico en formal normal é

$$\mathcal{E}_{2t}(x, y, z) = \frac{(-i)^2 t_1 n_o^2 A'_{o1}}{|q_2|^2} x e^{-i2\phi_{G2}} e^{ik_o n_o z} e^{i\{k_o n_o \frac{(x^2+y^2)(z - n_o z_1)}{2|q_2|^2}\}} e^{-k_o n_o^2 z_{o1} \frac{(x^2+y^2)}{2|q_2|^2}}$$

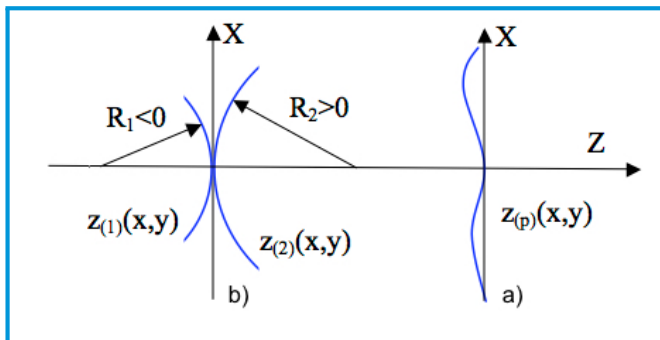
-Deste exemplo conclúese que os campos H-G de orde  $mn$  terían os mesmos parámetros  $z_2$  e  $z_{o2}$  (logo  $q_2$ ) excepto os factores de amplitude e as fases de Gouy.



### 2.7. DISCONTINUIDADES PARAXIAIS NON PLANAS

■ **Concepto de fronteiras paraxiais.** Unha **fronteira**, superficie ou **discontinuidade paraxial**  $z_{(p)}(x, y)$  está caracterizada por ter normais pretas dunha dirección, p.ex. a  $z$ , polo tanto as ondas  $t$  e  $r$  na discontinuidade seguirán a ser  $z$ -paraxiais. En xeral consideramos superficies (**seccións**) ou fronteiras tal que  $z_{(p)}(0, 0) = 0$  (sen perda de xeralidade) e  $|z_{(p)}(x, y)| \ll 1, \forall(x, y)$ , como se mostra na Fig.a).

Discontinuidades básicas son, p.ex., as planas, esféricas, cilíndricas, etc., que serán **paraxiais** se a normal local da superficie é  $\mathbf{n}(\mathbf{r}) \approx \mathbf{u}_z$ .



Sexa p.ex., unha **superficie esférica** tangente ó plano  $z = 0$ . Pode ter centros de curvatura en  $(0, 0, R_1)$  ou  $(0, 0, R_2)$ , con radios de curvatura, **por exemplo**:  $R_1 < 0$  e  $R_2 > 0$ , como na Fig.b). A primeira superficie esférica á esquerda da Figura vén representada exactamente pola función  $x^2 + y^2 + (z - R_1)^2 = R_1^2$ . Se fose, p.ex.,  $y$ -cilíndrica sería  $x^2 + (z - R_1)^2 = R_1^2$ .

Co obxecto de obter a aproximación  $z$ -paraxial da superficie esférica desdexamos  $z$  da ecuación da superficie (ecuación de segundo grao en  $z$ ), e obtense

$$z_{(1)} = R_1 \pm \sqrt{R_1^2 - (x^2 + y^2)} \rightarrow z_{(1)} = R_1 - \sqrt{R_1^2 - (x^2 + y^2)} \quad (67)$$

Por consistencia escóllese a **solución con signo negativo**, é dicir, a sección esférica tangente á orixe (a outra parte con signo + non está na Figura).

**-Fronteiras paraxiais esféricas.** A aproximación **paraxial** consiste en considerar que temos  $|R_1| \gg |x|, |y|$ ,

$$z_{(1)} \simeq R_1 - R_1 \left[ 1 - \frac{(x^2 + y^2)}{2R_1^2} - \frac{(x^2 + y^2)^2}{8R_1^4} \right] \approx \frac{(x^2 + y^2)}{2R_1} \quad (68)$$

onde usamos a Ec. (45), i.e., Taylor a orde 2, logo un **dioptrio esférico**. Se  $R_1 = \pm \infty$  temos o dioptrio plano ou fronteira plana, é dicir,  $z_{(1)} = 0$ .

**-Fronteiras paraxiais cilíndricas.** Eliminando formalmente unha das dimensións (dioptrio cilíndrico),

$$z_{(1)} \simeq \frac{x^2}{2R_1} \quad (\text{ou } z_{(1)} \simeq \frac{y^2}{2R_1}) \quad (69)$$

**-Fronteiras asféricas (case-paraxiais).** Son fronteiras que non corresponden ao desenvolvemento en Taylor dunha esfera, ver Ec. (68), coma p.ex. a superficie cuártica

$$z_{(a)}(x, y) = \frac{1}{2R} (x^2 + y^2) + \frac{1}{8R_a^3} (x^2 + y^2)^2, \text{ con } R_a \neq R. \quad (70)$$

Nestas fronteiras a propagación, despois da T ou R, non conserva a forma da onda (é preciso unha teoría máis xeral: **difracción**). Porén, pode haber **solucións particulares**.

## 2.8. FUNCIONES DE TRANSMISIÓN E DISCONTINUIDADES

■ **Función de transmisión dunha superficie.** Sexa unha **discontinuidade (superficie) paraxial**  $z_{(1)}$  separando dous medios de índice  $n_1$  e  $n_2$ . A c.d.c. na superficie  $z=z_{(1)}$  é

$$t_1 \mathcal{E}_1(x, y, z_{(1)}) = \mathcal{E}_{2t}(x, y, z_{(1)}) \quad (71)$$

Sexa a factorización paraxial da Ec. (34),  $\mathcal{E}_{(1,2t)}(\mathbf{r}) = e^{ik_0 n_{(1,2)} z} \mathbf{E}_{(p1,p2t)}(\mathbf{r})$ , e a aproximación na amplitude paraxial:  $\mathbf{E}_{(p1,p2t)}(x, y, z_{(1)}) \approx \mathbf{E}_{(p1,p2t)}(x, y, 0) = \mathcal{E}_{(1,2t)}(x, y, 0)$  (**ver esférica paraxial**), entón

$$\begin{aligned} t_1 e^{ik_0 n_1 z_{(1)}(x,y)} \mathcal{E}_1(x, y, 0) &= e^{ik_0 n_2 z_{(1)}(x,y)} \mathcal{E}_2(x, y, 0) \rightarrow \\ \rightarrow t_1 e^{ik_0 (n_1 - n_2) z_{(1)}(x,y)} \mathcal{E}_1(x, y, 0) &\equiv t(x, y) \mathcal{E}_1(x, y, 0) \approx \mathcal{E}_2(x, y, 0) \end{aligned} \quad (72)$$

onde  $t(x, y)$  é a denominada **función de transmisión (FdT)** dunha discontinuidade paraxial no plano  $z \approx 0$ .

$$t(x, y) = t_1 e^{ik_0 (n_1 - n_2) z_{(1)}(x,y)} \quad (73)$$

Daquela, o **concepto de función de transmisión** é que a acción da discontinuidade  **sintetízase** cunha función FdT no plano  $z=0$  actuando multiplicativamente sobre o campo óptico nese plano. Consecuentemente, reduce os problemas de discontinuidades en superficies a discontinuidades planas efectivas.

-É doado probar que a FdT para **ondas regresivas**, nesa discontinuidade, é a mesma salvo o coeficiente de Fresnel (**Exer**), é dicir,  $t'(x, y) = t'_1 e^{-ik_0 (n_2 - n_1) z_{(1)}(x,y)}$ .

**Exem.-FdT dunha discontinuidade esférica e resolución das c.d.c.** Achemos *ab initio* a FdT dunha **discontinuidade esférica paraxial**  $z_{(1)} = (x^2 + y^2)/2R_1$ , e resolvamos as c.d.c.,

$$\frac{t_1 A'_{o1} e^{ik_0 n_1 z_{(1)}}}{(z_{(1)} - z_1)} e^{i\{k_0 n_1 \frac{(x^2+y^2)}{2(z_{(1)} - z_1)}\}} = \frac{A_{o2} e^{ik_0 n_2 z_{(1)}}}{(z_{(1)} - z_2)} e^{i\{k_0 n_2 \frac{(x^2+y^2)}{2(z_{(1)} - z_2)}\}} \quad (74)$$

En xeral  $|z_1|, |z_2| \gg z_{(1)}$ , en consistencia coa aproximación paraxial, polo tanto obtense, en boa aproximación,

$$\{t_1 e^{ik_0 (n_1 - n_2) z_{(1)}}\} \frac{A'_{o1}}{z_1} e^{-i\{k_0 n_1 \frac{(x^2+y^2)}{2z_1}\}} \approx \frac{A_{o2}}{z_2} e^{-i\{k_0 n_2 \frac{(x^2+y^2)}{2z_2}\}} \quad (75)$$

Daquela obtemos, como xa sabiamos, a seguinte expresión para a función de transmisión dun dioptrio esférico

$$t_D(x, y) = t_1 e^{ik_0 (n_1 - n_2) z_{(1)}(x,y)} = t_1 e^{ik_0 (n_1 - n_2) \frac{(x^2+y^2)}{2R_1}} \quad (76)$$

-Agora aproveitamos para **resolver a discontinuidade**. Da igualdade de fase na Ec. (75) obtemos a seguinte expresión para o parámetro  $z_2$ :

$$\frac{(n_1 - n_2)}{R_1} - \frac{n_1}{z_1} = -\frac{n_2}{z_2} \Leftrightarrow \frac{n_2}{z_2} - \frac{n_1}{z_1} = \frac{(n_2 - n_1)}{R_1} \equiv \frac{n_2}{f_D} \rightarrow z_{2D} = \frac{n_r z_1 f_D}{(n_r z_1 + f_D)} \quad (77)$$

onde  $n_r = n_2/n_1$  e  $f_D = n_2 R_1 / (n_2 - n_1)$ . A Ec. (77) é a chamada **LdC** dun dioptrio, e  $f_D$  é a focal do dioptrio, i.e., se  $z_1 \rightarrow -\infty$  entón  $z_2 \rightarrow z_{2D} = f_D$ . Nótese que no límite  $1/R_1 = 0$  recuperamos a LdC dunha fronteira plana.

-Finalmente, a amplitude  $A_{o2}$  da onda transmitida dá de novo a relación xeral recollida na Ec. (52), é dicir,

$$A_{o2D} = t_1 A_{o1}(z_2/z_1) = t_1 A_{o1}(z_{2D}/z_1) \equiv -t_1 E_{o1} z_{2D}$$

O campo transmitido obtense substituindo  $z_2 = z_{2D}$  e  $A_{o2} = t_1 A_{o1}(z_{2D}/z_1)$  na expresión xeral de  $\mathcal{E}_{2t}(x, y, z)$  dado, p.ex. na Ec. (37) (**Exer**).



**Exer.- 8 (\*)** Sexa unha fonte puntual sita no punto  $(x_1, y_1, z_1) = (a, 0, -L)$ , de l.d.o.  $\lambda_o$  e factor de amplitude  $A_{o1}$  iluminando un dioptrio esférico  $n_1(n_2, \text{ con radio } R$ . Achar o campo óptico  $\mathcal{E}_2(x, y, z)$ .

**Sol.-**Escribindo a expresión da onda incidente, a expresión da función de transmisión e impoñendo as c.d.c., temos

$$\left\{ t_1 e^{ik_o(n_1-n_2)\frac{x^2+y^2}{2R}} \right\} \frac{A'_{o1}}{L} e^{i\{k_on_1\frac{[(x-a)^2+y^2]}{2L}\}} \approx \frac{-A_{o2}}{z_2} e^{-i\{k_on_2\frac{[(x-x_2)^2+(y-y_2)^2]}{2z_2}\}}$$

Agora desenvolvendo as fases en **termos lineais e cuadrático e agrupando constantes complexas**, obtemos

$$\begin{aligned} & \left( \frac{A'_{o1}}{L} e^{i\{k_on_1\frac{a^2}{2L}\}} t_1 \right) e^{ik_o\frac{x^2+y^2}{2} \left[ \frac{(n_1-n_2)}{R} + \frac{n_1}{L} \right]} e^{-i\{k_on_1\frac{xa}{L}\}} \approx \\ & \approx \left( \frac{-A_{o2}}{z_2} e^{-i\{k_on_2\frac{(x_2^2+y_2^2)}{2z_2}\}} \right) e^{-i\{k_on_2\frac{(x^2+y^2)}{2z_2}\}} e^{i\{k_on_2\frac{xx_2}{z_2}\}} e^{i\{k_on_2\frac{yy_2}{z_2}\}} \end{aligned}$$

Temos dous prefactores (amplitudes constantes complexas), fases cuadráticas e fases lineais. Logo as c.c. verifícanse se ditas amplitude e fases son iguais, i.e.,

-Fase en  $(x^2 + y^2)$ :  $\frac{n_1-n_2}{R} + \frac{n_1}{L} = -\frac{n_2}{z_2} \Rightarrow z_{2D} = \frac{-n_2}{\frac{n_1-n_2}{R} + \frac{n_1}{L}}$  (LdC do dioptrio)

-Fase lineal en  $y$ :  $y_2 = 0$ . Fase lineal en  $x$ :  $-\frac{n_1a}{L} = \frac{n_2x_2}{z_2}$ , logo  $x_{2D} = -\frac{n_1a}{n_2L} z_{2D}$ .

Este é en realidade un resultado xeral, é dicir, xa que  $x_1=a$  entón  $m=x_2/x_1=z_2n_1/z_1n_2$ , **chamada Lei do Aumento (LdA)**, neste caso dun dioptrio.

-Amplitude:

$$A_{o2D} = -\frac{t_1 A'_{o1}}{L} e^{i\{k_on_1\frac{a^2}{2L}\}} z_{2D} e^{i\{k_on_2\frac{x_{2D}^2}{2z_{2D}}\}} = -\frac{t_1 A'_{o1}}{L} e^{i\{k_on_1\frac{a^2}{2L}\}} z_{2D} e^{i\{k_on_1\frac{n_1}{n_2} \frac{a^2}{2L^2} z_{2D}\}}.$$

É de interese observar que no caso dun dioptrio plano  $z_{2D}=(n_2/n_1)(-L)$  (e  $x_{2D}=a$ ), logo as fases do factor de amplitude vanse, coma ocorre no Exer.-4.

Agora cos valores obtidos de  $z_{2D}$ ,  $x_{2D}$  e  $A_{o2D}$  podemos escribir a expresión da onda transmitida,

$$\mathcal{E}_{2t}(x, y, z) = \frac{A_{o2D}}{(z - z_{2D})} e^{i\{k_on_2\frac{[(x-x_{2D})^2+y^2]}{2(z-z_{2D})}\}} e^{ik_on_2z}$$

**Exer.- 9** -Achar, usando c.d.c., a onda incidente sobre un dioptrio esférico 1 ( $n$  con radio de curvatura  $R_1 > 0$ , para obter a ona  $\mathcal{E}_{2t}=E_o e^{ik_onz}$ . *Idem* para obter  $\mathcal{E}_{2t}=E_o e^{ik_on(\alpha x+z)}$ . *Idem* se o dioptrio é cilíndrico con radio de curvatura  $R_{1y} > 0$  (onda x-invariante)

**Sol.-**Da igualdade de abaixo (c.d.c. como **problema inverso**) quítase a posición axial da fonte puntual  $z_1$  e a transversal  $x_1, y_1$ , que define a onda esférica que se precisa para obter unha  $z$ -plana, é dicir,

$$\left\{ t_1 e^{ik_o(1-n)\frac{x^2+y^2}{2R_1}} \right\} \frac{A'_{o1}}{-z_1} e^{i\{k_o\frac{[(x-x_1)^2+(y-y_1)^2]}{-2z_1}\}} \approx A_{o2} \Rightarrow x_1 = y_1 = 0, \quad z_1 = \frac{R_1}{1-n}$$

-Se a onda emerxente fose  $\mathcal{E}_{2t}=E_o e^{ik_on(\alpha x+z)}$  entón precisaríamos ademais  $x_1 = \alpha n z_1$ .

-Se o dioptrio fose cilíndrico, entón precisamos una onda incidente cilíndrica coa fonte  $x$ -lineal en  $z_1=R_{1y}/(1-n)$ .

**Exer.- 10 [C]** Sexa unha superficie esférica de revolución de cuarto orde separando os medios  $n_1$  e  $n_2$  representada como  $z_{(p)}(x, y) \approx (x^2 + y^2)/2R_1 + (x^2 + y^2)^2/8R_a^3 + \dots$ . 10.1.-Sexa unha onda plana incidente sobre dela. Probar que dita superficie (expresión de  $R_a$ ) pode producir unha onda esférica (a cuarta orde) converxendo a un punto  $z_2$  (ao punto paraxial). 10.2.-Fágase tamén para unha onda diverxente de  $(0, 0, z_1)$ .

**Sol.-10.1.-**Lembremos a LdC dun dioptrio:  $n_2/z_2 - n_1/z_1 = (n_2 - n_1)/R_1$ . Daquela, para o caso de onda plana temos o valor paraxial  $z_2 = n_2 R_1 / (n_2 - n_1)$ . Ademais se chamamos ao termo cuadrático  $z_{(1)} = (x^2 + y^2)/(2R_1)$  escribimos a c.d.c. na superficie esférica como

$$e^{i\{k_o(n_1 - n_2) \frac{(x^2 + y^2)^2}{8R_a^3}\}} e^{i\{k_o(n_1 - n_2) \frac{(x^2 + y^2)}{2R_1}\}} \cdot 1 \approx e^{-i\{k_o \frac{n_2(x^2 + y^2)}{2z_2[1 - z_{(1)}/z_2]}\}} e^{-i\{k_o \frac{n_2(x^2 + y^2)^2}{8(z_2 - z_{(1)})^3}\}}$$

facendo o desenvolvemento de Taylor a orde 1 de  $1/[1 - z_{(1)}/z_2]$ , é dicir, para  $z_{(1)}/z_2 \approx 0$ , obtemos

$$\frac{1}{1 - z_{(1)}/z_2} \approx 1 + \frac{z_{(1)}}{z_2} = 1 + \frac{(x^2 + y^2)}{2R_1 z_2}$$

a fase cuadrática vaise, e só quedan fases cuárticas (as de orde superior desprézanse) das que se obtén a condición

$$\frac{n_1 - n_2}{8R_a^3} = -\frac{n_2}{4z_2^2 R_1} + \frac{n_2}{8z_2^3} \Rightarrow \frac{n_2 - n_1}{8R_a^3} = \frac{n_2}{8z_2^2} \left( \frac{2}{R_1} - \frac{1}{z_2} \right) \quad (a)$$

Sostituíndo o valor paraxial de  $z_2$  indicado arriba e operando obtemos o seguinte valor para o parámetro  $R_a$  da superficie esférica

$$R_a^3 = \frac{(n_2 - n_1)/8}{\frac{n_2}{8z_2^2} \left( \frac{2}{R_1} - \frac{1}{z_2} \right)} \Rightarrow R_a = \frac{n_2 R_1}{[n_2(n_2^2 - n_1^2)]^{1/3}}$$

Logo  $R_a$  determínase cos índices e co radio de curvatura esférico e permite obter unha onda converxente a orde catro ao punto  $z_2$ . No caso particular  $n_1=1$ ,  $n_2=1.5$ , obtense  $R_a \approx 1.2 R_1$ .

Este tipo de superficies son fundamentais para instrumentación óptica de calidade (microscopía, astronomía, ...). A dificultade técnica de fabricación destas superficies ópticas é grande, así coma o seu custo.

10.2.-Para o **caso dunha onda diverxente** dun punto  $(0, 0, z_1)$  seguiríase o mesmo procedemento, obtendo outra solución particular. Neste caso hai dous termos máis de fase debido á onda incidente, análogo aos que aparecen na onda refractada, logo a Ec.(a) reescríbese como

$$\frac{n_1 - n_2}{8R_a^3} - \frac{n_1}{4z_1^2 R_1} + \frac{n_1}{8z_1^3} = -\frac{n_2}{4z_2^2 R_1} + \frac{n_2}{8z_2^3} \quad (b)$$

Agora a LdC impón o seguinte valor de  $z_2 = n_2 z_1 R_1 / [n_1 R_1 + z_1(n_2 - n_1)]$ , que sustituído na ecuación (b) dá a solución particular para  $R_a$ .

-Nótese que deste xeito o valor de  $z_2$  é exacto a orde cuarto na fronte de onda o que mellora notablemente a calidade da transformación óptica.

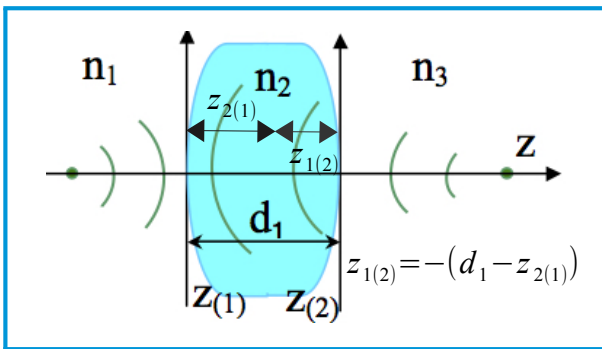
## 2.9. DISCONTINUIDADES ÓPTICAS MÚLTIPLES [C]

**-Discontinuidades ópticas dobres.** No Ex. 5 xa apareceu este problema e que agora imos formalizar un pouco máis para fonte axial. Sexa unha primeira discontinuidade  $n_1$  ( $n_2$ , que transmite unha onda  $\mathcal{E}_2$ , con  $A_{o2} = A'_{o1} z_2 / z_1$ , e parámetro  $z_2$  dado pola Ec. (77),

$$\mathcal{E}_{2t}(x, y, z) = \frac{A_{o2}}{(z - z_2)} e^{i\{k_o n_2 \frac{(x^2 + y^2)}{2(z - z_2)}\}} e^{ik_o n_2 z}$$

Sexa agora unha distancia  $d_1$  da primeira discontinuidade  $z_{(1)}$  á segunda discontinuidade,  $z_{(2)} = (x^2 + y^2) / 2R_2$ , cun terceiro medio de índice  $n_3$  (elemento óptico, **p.ex.**, unha lente grosa). Baixo propagación libre  $d_1$  e usando a FdT da 2ª discontinuidade temos

$$\{t_2 e^{i\{k_o(n_2 - n_3) \frac{(x^2 + y^2)}{2R_2}\}}\} \frac{A_{o2} e^{ik_o n_2 d_1}}{(d_1 - z_2)} e^{i\{k_o n_2 \frac{(x^2 + y^2)}{2(d_1 - z_2)}\}} = \frac{A_{o3}}{-z_3} e^{-i\{k_o n_3 \frac{(x^2 + y^2)}{2z_3}\}} \quad (78)$$



O campo  $\mathcal{E}_3$  está referido a un  $SR_{(2)}$  coa orixe en  $(0, 0, d_1)$ . Non é útil usar o  $SR_{(1)}$  centrado en  $(0, 0, 0)$ , xa que, entre outras razóns, dita onda non está fisicamente definida en  $z < d_1$ . Fisicamente o **valor do campo** da onda incidente na 2ª discontinuidade ( $\mathcal{E}_2$ ) **non cambia co SR** que usemos, logo queda referida ao  $SR_{(1)}$ .

**Resolución da c.d.c.** Da Ec. (78) temos as ecs. para a amplitude  $A_{o3}$  e fase da onda emerxente,

$$A_{o3} = t_2 A_{o2} e^{ik_o n_2 d_1} \frac{-z_3}{(d_1 - z_2)} = t_2 \left( t_1 A'_{o1} \frac{z_2}{z_1} \right) e^{ik_o n_2 d_1} \frac{-z_3}{(d_1 - z_2)}, \quad (79)$$

$$e^{i\{k_o(n_2 - n_3) \frac{(x^2 + y^2)}{2R_2}\}} e^{i\{k_o n_2 \frac{(x^2 + y^2)}{2(d_1 - z_2)}\}} = e^{-i\{k_o n_3 \frac{(x^2 + y^2)}{2z_3}\}} \quad (80)$$

De (80) obtemos  $z_3(z_2)$ , e como corolario, temos a LdC dunha **lente grosa** de espesor  $d$  e índice  $n_2$  mergullada entre os medios  $n_1$  e  $n_3$ . Lembrar que  $z_2$  vén dado pola Ec. (77). Logo a **expresión da onda emerxente**  $\mathcal{E}_3$  respecto a  $SR_{(2)}$  nun plano  $z$  no terceiro medio é, tendo en conta as ecs. (79) e (80),

$$\mathcal{E}_{3t}(\mathbf{r}) = \left( t_2 t_1 A'_{o1} \frac{z_2}{z_1} \frac{z_3}{(z_2 - d_1)} e^{ik_o n_2 d_1} \right) \frac{1}{(z - z_3)} e^{ik_o n_3 z} e^{i\{k_o n_3 \frac{(x^2 + y^2)}{2(z - z_3)}\}}$$

Usando agora unha notación referida ás discontinuidades (subíndices con parénteses):  $z_1 = z_{1(1)}$ ,  $z_2 = z_{2(1)}$ ,  $z_3 = z_{2(2)}$ , e a importante **relación de concatenación** (ver Figura para detalles)  $z_{1(2)} = -(d_1 - z_{2(1)}) = (z_{2(1)} - d_1)$ , obtemos

$$\mathcal{E}_{3t}(\mathbf{r}) = A'_{o1} t_1 t_2 \frac{z_{2(1)}}{z_{1(1)}} \frac{z_{2(2)}}{z_{1(2)}} e^{ik_o n_2 d_1} \frac{1}{(z - z_{2(2)})} e^{ik_o n_3 z} e^{i\{k_o n_3 \frac{(x^2 + y^2)}{2(z - z_{2(2)})}\}} \quad (81)$$

Segundo o Exer.-8 é doado probar que  $(z_{2(N)} / z_{1(N)}) \dots (z_{2(1)} / z_{1(1)}) = (n_N / n_1) m_N \dots m_1$ , e que se a fonte non é axial aparecen fases cuadráticas constantes.

**Exer.- 11 [C]** Xeralizar a Ec. (81) para  $N=3$ , e de seguido para un **número arbitrario N** de discontinuidades. Nótese que a relación de concatenación xeral sería  $z_{1(j+1)} = (z_{2(j)} - d_j)$ .

## 2.10. TRANSMISIÓN EN ELEMENTOS ÓPTICOS DELGADOS

■ **Elementos ópticos delgados e FdT.** Sexan dúas superficies  $z_{(1)}$  e  $z_{(2)}$  que separan tres medios de índices  $n_1$ ,  $n_2$  e  $n_3$ . Se  $d_1$  é a separación axial das ditas superficies, dise que temos un **elemento óptico delgado** se  $d_1 \ll z_{1(i)}, z_{2(i)}, i = 1, 2$ . Na 2ª discontinuidade temos  $\mathcal{E}_{2t}(x, y, z=d_1) = e^{ik_0 n_2 d_1} E_{p2t}(x, y, d_1)$  sobre a que actúa  $t_2(x, y)$  e produce  $\mathcal{E}_{3t}(x, y)$ ,

$$\mathcal{E}_{3t} = t_2(x, y) e^{ik_0 n_2 d_1} E_{p2t}(x, y, d_1) \left\{ \text{(exem.)} = t_2(x, y) e^{ik_0 n_2 d_1} \frac{A_{o2} e^{i\{k_0 n_2 \frac{(x^2+y^2)}{2(d_1-z_2)}\}}}{(d_1 - z_2)} \right\} \quad (82)$$

$\mathcal{E}_{2t}$  queda case invariante (ver exem. esférico), salvo fase, por “curta” propagación  $d_1 \ll z_2$ :  $\mathcal{E}_{2t}(x, y, d_1) = e^{ik_0 n_2 d_1} E_{p2t}(x, y, d_1) \approx e^{ik_0 n_2 d_1} \mathcal{E}_{2t}(x, y, 0)$ , logo

$$\mathcal{E}_{3t}(x, y) \approx t_2(x, y) e^{ik_0 n_2 d_1} \mathcal{E}_{2t}(x, y, 0) \approx \{t_2(x, y) e^{ik_0 n_2 d_1} t_1(x, y)\} \mathcal{E}_1(x, y, 0) \quad (83)$$

Entón a FdT total dun elemento delgado (p.ex., unha lente delgada) vén dada pola expresión

$$t(x, y) = t_2 e^{ik_0(n_2-n_3)z_{(2)}} e^{ik_0 n_2 d_1} t_1 e^{ik_0(n_1-n_2)z_{(1)}} \quad (84)$$

Logo un elemento óptico delgado, salvo fases globales de propagación, a función de transmisión é o **produto das FdT das discontinuidades**, actuando sobre  $\mathcal{E}_1$  en  $z \approx 0$ .

-**Xeneralización:** para un sistema óptico delgado con  $N$  **discontinuidades** obtense a expresión

$$t(x, y) = e^{ik_0 l_c} \prod_{j=1}^N t_j e^{ik_0(n_j-n_{j+1})z_{(j)}}, \quad l_c = \sum_{j=1}^{N-1} n_{j+1} d_j \quad (85)$$

onde  $t_j \simeq 2n_j/(n_{j+1}+n_j)$ . Obviamente  $d_T = \sum d_j$  ( $j=1, \dots, N-1$ ) debe ser moito menor que os radios de curvaturas inicial e final das ondas ( $z_1=z_{1(1)}, z_{N+1}=z_{2(N)}$ ), dende o plano de entrada e de saída, respectivamente.

-**Exem.-FdT dunha lente delgada.** A FdT vén dada pola Ec. (84) (cambiaremos a unha notación máis **estándar** para elementos delgados con  $N=2$ , i.e.,  $n_3 \leftrightarrow n_2, z_3 \leftrightarrow z_2, n_2 \leftrightarrow n$ ), é dicir,  $n_1(n)n_2$ , logo

$$\begin{aligned} t_1 t_2 e^{ik_0 n_2 d_1} e^{ik_0[(n_2-n_3)z_{(2)}+(n_1-n_2)z_{(1)}]} &\equiv t_1 t_2 e^{ik_0 n d_1} e^{ik_0[(n-n_2)z_{(2)}+(n_1-n)z_{(1)}]} = \\ &= t_1 t_2 e^{ik_0 n d_1} e^{-i\frac{k_0 n_2}{2} \left\{ \frac{1}{n_2} \left[ \frac{(n_2-n)}{R_2} + \frac{(n-n_1)}{R_1} \right] \right\} (x^2+y^2)} \end{aligned} \quad (86)$$

A FdT dunha lente delgada pódese escribir de forma compacta, usando a distancia focal imaxe  $f$ , con  $1/f = (1/n_2)[(n_2-n)/R_2 + (n-n_1)/R_1]$  (distanza á que converxe unha onda esférica nun medio  $n_2$  emerxendo dunha lente iluminada cunha onda plana), é dicir,

$$t_L(x, y) = t_1 t_2 e^{ik_0 n d_1} e^{-ik_0 n_2 \frac{(x^2+y^2)}{2f}} \quad (87)$$

Esta **expresión é bastante xeral** para elementos delgados con varias discontinuidades esféricas. A FdT  $t_L(x, y)$  permite achar a onda emerxente da lente (importante no cálculo de interferencia e/ou difracción). Finalmente, se  $f \rightarrow \infty$  entón obtemos  $t_L = t_1 t_2 e^{ik_0 n d_1}$  que é a FdT dunha **lámina plano-paralela delgada**.

**Exer.- 12** (\*) Sexa unha lente delgada (en  $z=0$  no baleiro) de índice  $n$ , espesor  $d_1$  e focal  $f$ , iluminada cunha onda esférica paraxial con parámetros  $(x_1, 0, z_1)$  e f.d.a.  $A_{o1}$ . 12.1.- Usando a súa FdT, obter a Lei de Conxugación (**LdC**)  $1/z_2 - 1/z_1 = 1/f$ , e a Lei do Aumento (**LdA**)  $m = x_2/x_1 = z_2/z_1$ . 12.2.-Escribir a expresión da onda emerxente da lente.

**Sol.-12.1.**-Da unicidade de fase (con  $t_1 t_2 = 4n/(1+n)^2$ ) obtense a LdC e a LdA En efecto, da relación

$$\left\{ t_1 t_2 e^{ik_o n d_1} e^{-i \left\{ k_o \frac{(x^2+y^2)}{2f} \right\}} \right\} \frac{A'_{o1}}{z_1} e^{-i \left\{ k_o \frac{[(x-x_1)^2+y^2]}{2z_1} \right\}} = \frac{A_{o2}}{z_2} e^{-i \left\{ k_o \frac{[(x-x_2)^2+y^2]}{2z_2} \right\}}$$

e igualando os termos cuadráticos de fase,  $-k_o \frac{(x^2+y^2)}{2f} - k_o \frac{(x^2+y^2)}{2z_1} = -k_o \frac{(x^2+y^2)}{2z_2}$ , obtemos  $-1/f - 1/z_1 = -1/z_2$  e daquela a LdC Ademais despegando  $z_2$  obtemos  $z_{2L} = z_1 f / (z_1 + f)$ . Asemade, igualando os termos lineais de fase,  $x x_1 / z_1 = x x_2 / z_2$  logo  $m = x_2 / x_1 = z_2 / z_1$ , logo  $m = z_{2L} / z_1$  que é a LdA da lente.

**Sol.-12.2.**-Para obter a expresión da onda debemos achar  $A_{o2}$ , logo da c.c. obtemos a expresión:

$$A_{o2} = t_1 t_2 e^{ik_o n d_1} A'_{o1} \frac{z_2}{z_1} e^{-ik_o \frac{x_1^2}{2z_1}} e^{ik_o \frac{x_2^2}{2z_2}} = t_1 t_2 e^{ik_o n d_1} A'_{o1} \frac{z_{2L}}{z_1} e^{-ik_o (1-m) \frac{x_1^2}{2z_1}} \quad (88)$$

Usando  $z_{2L}$ ,  $m$  e  $A_{o2}$  a onda emerxente pode escribirse como

$$\mathcal{E}_{2t} = t_1 t_2 e^{ik_o n d_1} \frac{z_{2L} A'_{o1}}{z_1} \frac{e^{-ik_o (1-m) \frac{x_1^2}{2z_1}}}{z - z_{2L}} e^{+i \left\{ k_o n_2 \frac{[(x-mx_1)^2+y^2]}{2(z-z_{2L})} \right\}}$$

**Exer.- 13** (\*) Sobre dunha lente delgada de espesor  $d_o$ , índice  $n$  e focal  $f_1 = 60$  cm, incide normalmente unha onda plana (feixe colimado) de sección circular  $S_1$  e  $E_{o1} = 1$ . 13.1.- Usando c.d.c. achar a expresión da onda emerxente da lente (tomar  $t = t_1 t_2 \approx 1$ ). 13.2.- Se a unha distancia de 90 cm desta lente situamos unha segunda lente converxente de igual espesor e índice, e focal  $f_2 = 30$  cm, achar a expresión da onda xusto no plano antes da segunda lente, e despois da lente, tomando ( $t = 1$ ). 13.3.-Finalmente achar, de xeito ondulatorio, o radio da sección circular do feixe de saída.

**Sol.-13.1.**-Usando a función de transmisión da lente obtemos a seguinte condición de continuidade

$$e^{ik_o n d_o} e^{-ik_o \frac{(x^2+y^2)}{2f_1}} \cdot 1 = \frac{A_{o2}}{-z_2} e^{-ik_o \frac{(x^2+y^2)}{2z_2}}$$

logo  $z_2 = f_1 = 60$  cm, e  $A_{o2} = -f_1 e^{ik_o n d_o}$ . Daquela, a expresión da onda transmitida en calquera plano  $z$  é

$$\mathcal{E}_{2t}(x, y, z) = -\frac{f_1 e^{ik_o n d_o}}{(z - f_1)} e^{ik_o z} e^{ik_o \frac{(x^2+y^2)}{2(z-f_1)}}$$

**Sol.-13.2.**-Na segunda lente, é dicir, en  $z = f_1 + f_2 = 90$  cm (confocalidade) e usando a FdT de dita lente, obtense

$$\left\{ e^{ik_o n d_o} e^{-ik_o \frac{(x^2+y^2)}{2f_2}} \right\} \frac{-f_1}{f_2} e^{ik_o n d_o} e^{ik_o (f_1+f_2)} e^{ik_o \frac{(x^2+y^2)}{2f_2}} = E_{o3}$$

logo temos **onda plana**  $E_{o3} e^{ik_o z}$ , con  $E_{o3} = (-f_1/f_2) e^{2ik_o n d_o} e^{ik_o (f_1+f_2)} = (-2) e^{2ik_o n d_o} e^{ik_o \cdot 90}$ .

**Sol.-13.3.**-Finalmente, usando a **conservación de potencia** temos  $S_1 I_1 = S_3 I_3$  polo tanto  $S_1 = 4S_3$ , logo os radios verifican  $R_3 = R_1/2$ . En xeral teremos  $R_3 = R_1 (f_2/f_1)$ .



**Exer.- 14** Sexa unha lente delgada sita no baleiro en  $z=0$  con espesor  $d_1$ , índice  $n$  e focal  $f$ . 14.1.- Usando a FdT da lente e as c.d.c., probar que se obtén unha **onda plana** cando a lente delgada é iluminada cunha onda esférica procedente de  $(a, 0, -f)$  con factor de amplitude  $A_{o1}$  e l.d.o.  $\lambda_o$ . 2.-De igual xeito se unha onda plana con  $\mathbf{k}=k_o(\alpha_o, 0, 1)$  e amplitude  $E_{o1}$ , incide sobre dita lente, achar a onda transmitida, e analizar a verxencia.

**Sol.-14.1-** A onda esférica incidente sobre da lente delgada en  $z=0$  experimenta a transformación

$$\left\{ t_1 t_2 e^{ik_o n d_1} e^{-ik_o \frac{(x^2+y^2)}{2f}} \right\} \frac{A_{o1} e^{ik_o f}}{f} e^{ik_o \frac{[(x-a)^2+y^2]}{2f}} = \left( t_1 t_2 \frac{A_{o1} e^{ik_o f}}{f} e^{ik_o n d_1} e^{ik_o \frac{a^2}{2f}} \right) e^{-ik_o \frac{a}{f} x}$$

Observemos que as fases cuadráticas canceláronse, daquela a onda emerxente abonda con que sexa plana, logo temos a seguinte **c.d.c.** en  $z = 0$

$$\left( t_1 t_2 \frac{A_{o1} e^{ik_o f}}{f} e^{ik_o n d_1} e^{ik_o \frac{a^2}{2f}} \right) e^{-ik_o \frac{a}{f} x} = E_{o2} e^{ik_o \alpha x}$$

logo  $E_{o2} = (A_{o1} e^{ik_o f} / f) t_1 t_2 e^{ik_o n d_1} e^{ik_o \frac{a^2}{2f}}$ , e  $\alpha = -a/f$ , polo tanto a onda emerxente plana vén dada pola expresión

$$\mathcal{E}_{2t}(x, y, z) = E_{o2} e^{ik_o(-\frac{a}{f}x+z)}$$

é dicir, onda plana paraxial con vector de onda  $\mathbf{k} \approx (2\pi/\lambda_o)(-a/f, 0, 1)$ , como tiñamos que probar.

**Sol.-14.2-** Se incide unha onda plana con vector de onda paraxial  $\mathbf{k} = k_o(\alpha_o, 0, 1)$ , temos o seguinte problema de fronteira

$$\left\{ t_1 t_2 e^{ik_o n d_1} e^{-ik_o \frac{(x^2+y^2)}{2f}} \right\} E_{o1} e^{ik_o \alpha_o x} = \frac{A_{o2}}{-z_2} e^{-ik_o \frac{(x-x_2)^2+(y-y_2)^2}{2z_2}}$$

Por inspección  $y_2=0$ . A amplitude  $A_{o2} = -z_2 t_1 t_2 e^{ik_o n d_1} E_{o1} e^{ik_o \frac{x_2^2}{2z_2}}$ . Da fase cuadrática é inmediato ver que  $z_2=f$ . Só queda a fase lineal en  $x$ , é dicir,  $\alpha_o x = (x_2/z_2)x$ , logo  $x_2 = \alpha_o f$ . Nótese que os valores de  $x_2$  e  $z_2$  deben substituírse na expresión  $A_{o2}$ . Daquela, a onda esférica paraxial é

$$\mathcal{E}_{2t}(x, y, z) = \frac{-f t_1 t_2 e^{ik_o n d_1} E_{o1} e^{ik_o \frac{\alpha_o^2 f}{2}}}{(z-f)} e^{ik_o \frac{(x-\alpha_o f)^2+y^2}{2(z-f)}} e^{ik_o z}$$

Obtemos unha **onda converxente ao punto**  $\mathbf{r}_2 = (\alpha_o f, 0, f)$  do chamado plano focal imaxe da lente. En efecto, o vector de Poynting é  $\mathbf{s}_p \approx (x-\alpha_o f, y, z-f)/(z-f)$ , se  $z < f$  entón  $\mathbf{s}_p \propto (\alpha_o f - x, 0 - y, f - z) = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}$ , i.e., converxente (se  $z > f$  a onda será diverxente).

**Exer.- 15** -Sexa a onda (feixe) Gaussiana dun láser de l.d.o.  $\lambda_o$  que en  $z=0$  vén dada pola expresión:  $\mathcal{E}_1(x, y, 0) = E_o \exp\{-(x^2 + y^2)/2w_o^2\}$ . 15.1.-Se en  $z=0$  hai unha lente delgada de espesor  $d_o$ , índice  $n$  e focal  $f$ , achar a expresión da onda Gaussiana, na súa forma complexa despois da lente, tendo en conta os coeficientes de transmisión  $t_1$  e  $t_2$ . 15.2.-Achar o plano  $z$  de máxima concentración (ou focalización) de enerxía.

**Sol.-O** produto  $t_L(x, y)\mathcal{E}_1$  é igual, por c.d.c. en  $z=0$ , a unha onda esférica paraxial transmitida  $\mathcal{E}_2$  con  $z_2$  ampliado ao dominio complexo. Chamando  $E'_o = t_1 t_2 E_o e^{ik_o n d_o}$  temos

$$t_L(x, y)\mathcal{E}_1 = E'_o e^{-ik_o \frac{(x^2+y^2)}{2} \left( \frac{1}{f} - \frac{i}{k_o w_o^2} \right)} = - \frac{A_{o2}}{(z_2 + iz_{o2})} e^{-ik_o \frac{(x^2+y^2)}{2(z_2 + iz_{o2})}}$$



Para achar a solución debemos igualar os factores de amplitude da exponencial cuadrática, e por outra banda as ditas exponenciais.

-Dos factores de amplitude temos  $A_{o2} = -E'_o(z_2 + iz_{o2})$ , e das exponenciais, con  $z_{o1} = k_o w_o^2$ , obtemos  $(z_2 + iz_{o2}) = (1/f - i/k_o w_o^2)^{-1} = f k_o w_o^2 / (k_o w_o^2 - if)$ , logo  $z_{2L} = f z_{o1}^2 / (f^2 + z_{o1}^2)$ , e  $z_{o2L} = f^2 z_{o1} / (f^2 + z_{o1}^2)$ . Polo tanto, usando  $t_1 t_2 = 4n / (1 + n)^2$ , a onda transmitida é

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{2t}(x, y, z) &= \frac{4n E_o}{(1 + n)^2} \frac{e^{ik_o n d_o} (1/f - i/k_o w_o^2)^{-1}}{(1/f - i/k_o w_o^2)^{-1} - z} e^{ik_o \frac{(x^2 + y^2)}{2[z - (1/f - i/k_o w_o^2)^{-1}]} } = \\ &= \frac{4n E_o}{(1 + n)^2} \frac{e^{ik_o n d_o} (z_{2L} + iz_{o2L})}{(z_{2L} + iz_{o2L} - z)} e^{ik_o \frac{(x^2 + y^2)}{2(z - z_{2L} - iz_{o2L})}} \end{aligned}$$

-No tocante ao cálculo de **máxima concentración** de intensidade, buscamos, por simetría, o máximo de intensidade  $I_M$  en  $z$ , é dicir,  $I(0, 0, z) \propto 1 / \{(z_{2L} - z)^2 + z_{o2L}^2\}$ , daquela  $I_M$  está no punto axial  $z = z_{2L} = f z_{o1}^2 / (f^2 + z_{o1}^2)$ . Nótese o **desprazamento focal** (ondulatorio):  $z_{2L} < f$ .

**Exer.- 16 [C]** Probar que  $\mathcal{E}_1(\mathbf{r})$  de luz procedente de  $(x_1, 0, z_1)$  sito no baleiro tende, no límite  $z \rightarrow z_1$ , a  $\mathcal{E}_1(x, y, z_1) = A_{o1}(i\lambda_o)\delta(x - x_1, y)$ , con  $\delta(x - x_1, y)$  a función (distribución funcional) delta de Dirac. Asemade, probar que no límite  $z \rightarrow z_2$  tamén temos a relación  $\mathcal{E}_2(x, y, z_2) = iA_{o2}\lambda_o\delta(x - x_2, y)$ .

**Sol.**-Comezamos recordando a **definición** e algunhas propiedades da función (distribución funcional)  $\delta$  de Dirac,

$$\delta(x - x_o) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{(\pi\epsilon)^{1/2}} e^{-\frac{(x-x_o)^2}{\epsilon}}$$

é dicir, é o límite dunha distribución funcional. Salientamos as seguintes **propiedades de escala e integral**,

Escala:  $\delta(ax) = |a|^{-1}\delta(x)$ ; Integral:  $\int f(x)\delta(x - x_o)dx = f(x_o)$

Apliquemos agora estes resultados a unha onda esférica paraxial  $\mathcal{E}_1(\mathbf{r})$  tomando o límite  $z \rightarrow z_1$ ,

$$\lim_{z \rightarrow z_1} \mathcal{E}_1(\mathbf{r}) = A_{o1} \lim_{z \rightarrow z_1} e^{ik_o(z-z_1)} \frac{e^{ik_o\left\{\frac{(x-x_1)^2}{2(z-z_1)}\right\}}}{(z - z_1)^{1/2}} \lim_{z \rightarrow z_1} \frac{e^{ik_o\left\{\frac{y^2}{2(z-z_1)}\right\}}}{(z - z_1)^{1/2}}$$

tomando  $\epsilon = -2(z - z_1) / ik_o$ , e comparando coa expresión xeral dunha función  $\delta$ , obtense o límite buscado

$$\boxed{\lim_{z \rightarrow z_1} \mathcal{E}_1(\mathbf{r}) = A_{o1}(i\lambda_o)\delta(x - x_1, y)}$$

Nótese que as unidades desta función  $\delta$  de Dirac son  $m^{-2}$  para ter unidades de campo óptico. Alternativamente esta función  $\delta$  de Dirac ten esas unidades xa que é a derivada segunda dunha función de Heavisde ou de salto. O mesmo resultado obteríamos para a onda  $\mathcal{E}_2(\mathbf{r})$ .

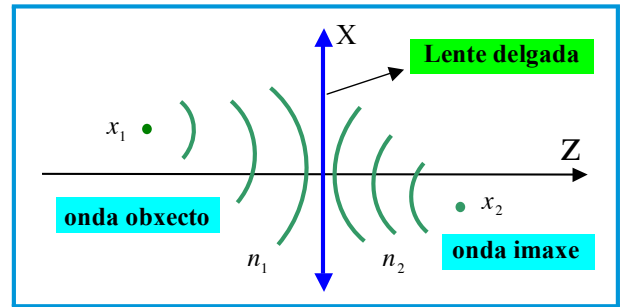
-É importante indicar que unha **formalización máis consistente** pode facerse con ondas Gaussianas, é dicir, con  $z_1 + iz_{o1}$ , e usando os límites  $z \rightarrow z_1$  e de seguido  $z_{o1} \rightarrow 0$ , xa que unha onda esférica require deste segundo límite.



## 2.11. TRATAMENTO ONDULATORIO XERAL DALENTE DELGADA [C]

As lentes son un dos elementos ópticos básicos de calquera instrumentos óptico, e en xeral de calquera sistema óptico. (S9).

Sexa unha lente delgada en  $z=0$  de focal  $f$ , índice  $n_o$  e espesor  $d_o$  no baleiro. Sexa unha onda esférica emerxendo dun punto **fóra do eixo**, p.e.,  $(x_1, 0, z_1)$ , entón, en xeral a onda esférica transmitida tamén o estará, é dicir,



$$\left\{ t_1 t_2 e^{i k_o n d_o} e^{-i k_o \frac{(x^2+y^2)}{2f}} \right\} \frac{A'_{o1}}{z_1} e^{-i k_o n_1 \left\{ \frac{(x-x_1)^2+y^2}{2z_1} \right\}} \simeq \frac{A_{o2}}{z_2} e^{-i k_o n_2 \left\{ \frac{(x-x_2)^2+(y-y_2)^2}{2z_2} \right\}} \quad (89)$$

**-Igualdade de amplitude.** Da igualdade das amplitudes complexas constantes obtemos a amplitude  $A_{o2}$  dada pola expresión

$$A_{o2} = t_1 t_2 A'_{o1} (z_2/z_1) e^{i k_o n d_o} e^{-i k_o n_1 \frac{x_1^2}{2z_1}} e^{i k_o n_2 \frac{x_2^2}{2z_2}} \quad (90)$$

**-Igualdade de fase.** Da igualdade dos **termos cadráticos** da fase obtemos a LdC da lente xa obtida no Ex. (12). E da igualdade dos termos da **fase lineal** obtemos

$$\frac{n_1 x_1}{z_1} x = \frac{n_2 x_2}{z_2} x + \frac{n_2 y_2}{z_2} y \quad (91)$$

esta ecuación satisfácese  $\forall(x, y)$  se os coeficientes en  $x$  e en  $y$  se anulan, é dicir,  $y_2 = 0$ , e  $n_1 x_1/z_1 = n_2 x_2/z_2$ , logo obtemos a chamada **Lei do Aumento (LdA)**,

$$\boxed{x_2 = \frac{z_2/n_2}{z_1/n_1} x_1, \quad m = \frac{x_2}{x_1} = \frac{z_2/n_2}{z_1/n_1} = 1 - \frac{z_2}{f} = \frac{1}{1 + (n_2 z_1/n_1 f)}} \quad (92)$$

*idem* se  $y_1 \neq 0$ . Polo tanto, todos os puntos-ondas obxecto teñen puntos-ondas imaxe ( $x_1$  **denota calquera punto obxecto**) escalados un factor  $m$ . Nótese, p.e., que se  $n_1 = n_2$ ,  $|z_1| > f > 0$  entón  $m < 0$  (**inversión** de imaxe).

-Daquela, de (90) temos  $A_{o2}$ , da LdC obtemos  $z_2$ , e polo tanto de (92) achamos  $m$ , con  $x_2 = m x_1$ . En resumo, a onda transmitida  $\mathcal{E}_2(\mathbf{r})$  é

$$\boxed{\mathcal{E}_{2t}(\mathbf{r}) = t_1 t_2 e^{i a_o} e^{-i k_o z_1} e^{i k_o n d_o} A_{o1} \frac{m(n_2/n_1)}{\left(z - \frac{z_1 f}{z_1 + f}\right)} e^{-i k_o n_2 \left\{ \frac{(x-x_1 m)^2+y^2}{2\left(z - \frac{z_1 f}{z_1 + f}\right)} \right\}} e^{i k_o n_2 z}} \quad (93)$$

con  $a_o = \left[-n_1 x_1^2/2z_1 + n_2 x_2^2/2z_2\right]$  a fase por desprazamento. Nótese que a onda está descrita en función dos datos alfanuméricos:  $A_{o1}$ ,  $k_o=2\pi/\lambda_o$ ,  $z_1$ ,  $x_1$ ,  $n_1$ ,  $n_2$ ,  $f$ . Tamén poderíamos ter usado  $z_2=m z_1(n_2/n_1)$ .

**Exer.- 17 (\*)** Sexa a onda esférica paraxial procedente dun obxecto luminoso puntual:  $\mathcal{E}_1(x, y, z) = [A'_{o1}/(z + 100)] e^{ik_0 z} e^{ik_0[(x-1)^2 + (y+1)^2]/2(z+100)}$  (os datos numéricos en cm) incidindo sobre dunha lente sita en  $z = 0$  con espesor (no centro)  $d_1 = 0.5$  cm e índice  $n = 3/2$ . Sexa  $\mathcal{E}_2(x, y, z) = [A_{o2}/(50 + z)] e^{ik_0 z} e^{ik_0[(x-x_2)^2 + (y-y_2)^2]/2(z+50)}$  a expresión das ondas emerxentes da lente. 17.1.-Achar a FdT  $t(x, y)$  da lente, incluíndo os coeficientes de transmisión. 17.2.-Achar a expresión completa da onda  $\mathcal{E}_2$  e achar a verxencia.

**Sol.-17.1.-**Do enunciado temos  $z_1 = -100$  e  $z_2 = -50$ , das que se pode obter, usando c.d.c. ou a LdC (xa que non se pide explicitamente que usemos as c.d.c.), a **focal  $f = -100$  cm (lente diverxente)**:

$$\frac{1}{z_2} - \frac{1}{z_1} = \frac{1}{f} \Rightarrow f = \frac{z_1 z_2}{z_1 - z_2}$$

ademais  $d_o \ll |z_1(z_2)|$ , logo a lente é un elemento delgado e a súa FdT vén dada, como xa sabemos, pola expresión

$$t_L(x, y) = \frac{2n}{(n+1)} \frac{2}{(1+n)} e^{ik_0 n d_1} e^{-ik_0 \frac{x^2+y^2}{2f}} = \frac{24}{25} e^{i \frac{3k_0}{4}} e^{ik_0 \frac{(x^2+y^2)}{200}}$$

17.2.-Para obter  $x_2$  podemos usar as c.d.c. (ou alternativamente, xa que non se pide explicitamente que usemos as c.d.c., podemos **usar a LdA**, logo  $m = 1/2 = x_2/x_1$ ); asemade por continuidade da amplitude obtemos o valor de  $A_{o2}$  (ver Ec. 88), logo

$$\mathcal{E}_{2t}(x, y, z) = \frac{24}{25} \frac{1}{2} \frac{A'_{o1}}{(z+50)} e^{i \frac{3k_0}{4}} e^{i \frac{k_0}{100}} e^{-i \frac{k_0}{200}} e^{ik_0 z} e^{ik_0 \frac{[(x-1/2)^2 + (y+1/2)^2]}{2(z+50)}}$$

Nótese que  $A'_{o1} = A_{o1} e^{ik_0 \cdot 100}$ . Da fase:  $s \approx ((x - 1/2)/(z + 50), (y + 1/2)/(z + 50), 1)$ . Logo é unha onda diverxente  $\forall z$ , diverxente virtualmente de  $(1/2, -1/2, -50)$ .

**Exer.- 18** -Sexa a discontinuidade  $z=0$  separando o baleiro dun medio material de índice negativo  $n_2 = -n$  ( $n > 0$ ) (para máis información ver Sección 2.15 [c]). Sexa unha onda esférica paraxial de factor de amplitude unidade procedente do punto  $(a, b, -L)$ , achar, usando c.d.c., a onda transmitida.

**Sol.-**Tendo en conta a c.d.c. e que o coeficiente de Fresnel obtense usando  $|n_2|$ , obtemos a seguinte expresión

$$\begin{aligned} t_1 \mathcal{E}_1(x, y, 0) &= t_1 \frac{e^{ik_0 L}}{L} e^{ik_0 \frac{(x-a)^2 + (y-b)^2}{2L}} = \left\{ t_1 = \frac{2}{1 + |n_2|} = \frac{2}{1 + n} \right\} = \\ &= \mathcal{E}_{2t}(x, y, 0) = \frac{A_{o2}}{-z_2} e^{ik_0(-n) \frac{(x-x_2)^2 + (y-y_2)^2}{-2z_2}} \end{aligned}$$

logo  $z_2 = nL$ ,  $x_2 = a$ ,  $y_2 = b$ , e  $A_{o2} = -t_1 n e^{ik_0 L}$ , logo obtemos a seguinte onda transmitida

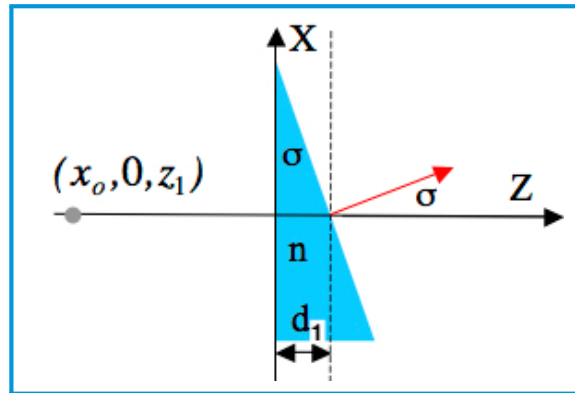
$$\mathcal{E}_{2t}(x, y, z) = -\frac{t_1 n e^{ik_0 L}}{(z - nL)} e^{-ik_0 n z} e^{-ik_0 n \frac{(x-a)^2 + (y-b)^2}{2(z-nL)}}$$

logo temos unha onda converxente ao punto  $(a, b, L)$ . Téñase en conta que  $s = \nabla \mathcal{L}_p / n_2$ , é dicir,  $s = (x - a, y - b, z - nL)/(z - nL) = -\mathbf{u}_{r-r_2}$ ,  $\forall z < nL$ . Temos un fenómeno chamado de refracción negativa nunha discontinuidade plana (cambio de verxencia, logo equivalente a unha lente).



### 2.12. TRATAMENTO ONDULATORIO DUN PRISMA DELGADO

Sexa un **prisma delgado** con distancia axial (espesor axial)  $d_1 \ll \lambda$ , índice  $n$ , ángulo refrinvente  $\sigma$  paraxial (pequeno), e mergullado no baleiro. Na Figura móstrase dito prisma con ángulo refrinvente  $\sigma (>0)$ .



A función de transmisión do prisma delgado obtense usando o resultado xeral correspondente ao caso de elementos ópticos delgados, é dicir, salvo as fases de propagación, a FdT é igual ao produto das funcións de transmisión de cada discontinuidade que, lembremos, teñen a forma xeral

$$t_i = e^{ik_o(n_i - n_{i+1})z(i)}$$

No caso prismático temos as discontinuidades paraxiais nos planos de referencia  $z = 0$  e  $z = d_1$  (ver Figura), é dicir,

$$z_{(1)}(x, y) = 0, \quad z_{(2)}(x, y) \approx -\sigma x \tag{94}$$

xa que  $z = \tan(-\sigma)x$  (ou  $x = \tan(\pi/2 + \sigma)z = -\cotan(\sigma)$ ) logo  $z \approx -\sigma x$ . Polo tanto, a 1ª FdT é  $t_{D_1} = t_1 \cdot 1$ , e despois dunha distancia  $d_1$ , onde se acumula por propagación unha fase  $e^{ik_o n d_1}$ , temos a 2ª FdT, é dicir,  $t_{D_2} = t_2 e^{ik_o(n-1)(-\sigma x)}$ , logo a acción do prisma delgado **sintetízase no “plano”  $z \approx 0$**  mediante a seguinte FdT total

$$t_P(x, y) = t_{D_2} e^{ik_o n d_1} t_{D_1} = t_1 t_2 e^{ik_o n d_1} e^{-ik_o(n-1)\sigma x} \tag{95}$$

Se  $\sigma = 0$  temos de novo a FdT dunha lámina plano-paralela delgada de índice  $n$  e espesor  $d_1$ , é dicir,  $t = t_1 t_2 e^{ik_o n d_1}$ .

**Exer.- 19** Sexa a onda  $\mathcal{E}_1(x, y, z) = E_o \exp\{ik_o(\alpha x + \beta y + z)\}$  incidente sobre un prisma con ángulo refrinvente  $\sigma$ , espesor  $d_1$  e índice  $n$ , tal e como se mostra na Figura. Achar a onda transmitida usando a FdT e a c.d.c.. Que sucedería se invertimos o prisma.

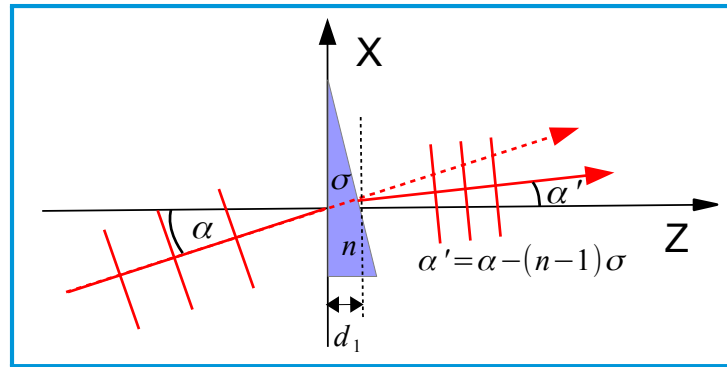
**Sol.-O** problema de fronteira resólvese, coma sempre, impondo as c.d.c., é dicir, en  $z \approx 0$  temos

$$(t_1 t_2 e^{ik_o n d_1} e^{-ik_o(n-1)\sigma x}) E_o e^{ik_o(\alpha x + \beta y)} = E_{o2} e^{ik_o(\alpha_2 x + \beta_2 y)}$$

É inmediato obter os valores da amplitude e a fase da onda transmitida polo prisma, é dicir,

$$E_{o2} = t_1 t_2 e^{ik_o n d_1} E_o, \quad \alpha_2 = \alpha - (n - 1)\sigma, \quad \beta_2 = \beta$$

Polo tanto a onda plana propagándose despois de atravesar o prisma vén dada pola expresión  $\mathcal{E}_{2t}(x, y, z) = t_1 t_2 e^{ik_o n d_1} E_o \exp\{ik_o [(\alpha - (n - 1)\sigma)x + \beta y + z]\}$



-Nótese que o vector de onda é  $\mathbf{k} = k_o(\alpha - (n - 1)\sigma, \beta, 1)$  Logo hai unha deflexión a dereitas da onda plana incidente, nunha cantidade  $-(n - 1)\sigma$  respecto á dirección orixinal (sen prisma) (ver Figura con  $\beta = 0$ ).

-Se invertimos o prisma a segunda superficie é  $z_{(2)} = \alpha x$ , logo a onda plana transmitida ten o seguinte vector de onda  $\mathbf{k} = k_o(\alpha + (n - 1)\sigma, \beta, 1)$  (deflexión a esquerdas).

**Exer.- 20 (\*)** Sexa unha onda esférica paraxial procedente dun punto  $(x_o, 0, z_1)$ . Impoñendo c.d.c. en  $z \simeq 0$ , achar a onda transmitida por un prisma delgado.

**Sol.-**As c.d.c. para un prisma delgado usando a función de transmisión veñen dadas pola relación

$$\{t_1 t_2 e^{ik_o [n d_1 - (n-1)\sigma x]}\} \frac{A'_{o1}}{z_1} e^{-i\{k_o \frac{(x-x_1)^2 + y^2}{2z_1}\}} = \frac{A_{o2}}{z_2} e^{-i\{k_o \frac{(x-x_2)^2 + (y-y_2)^2}{2z_2}\}}$$

-Da igualdade de fases cuadráticas obtemos a LdC dun prisma delgado de índice  $n$  e ángulo refrinvente  $\sigma$ , é dicir,  $z_2 = z_1$ , logo obtemos unha onda diverxente (imaxe virtual). Ademais, a igualdade das fases lineais dá

$$x_2 = x_1 - (n - 1)\sigma z_1$$

-Da igualdade de amplitudes obtemos o factor de amplitude  $A_{o2} = t_1 t_2 A'_{o1} e^{ik_o n d_1} e^{i\epsilon_p}$ , coa seguinte fase global

$$\epsilon_p = k_o [x_1 - (n - 1)\sigma z_1]^2 / 2z_1 - x_1^2 / 2z_1$$

Logo a onda emerxente, en función dos parámetros da onda incidente, vén dada pola expresión

$$\mathcal{E}_{2t}(x, y, z) = e^{ik_o n d_1} e^{i\epsilon_p} \frac{4n}{(1 + n)^2} \frac{A'_{o1}}{(z - z_1)} e^{i\{k_o \frac{[x - x_1 + (n-1)\sigma z_1]^2 + y^2}{2(z - z_1)}\}}$$

que representa unha onda esférica diverxente (virtualmente) do punto de coordenadas  $(x_1 - (n - 1)\sigma z_1, 0, z_1)$ . Todo o analizado serve para o caso simétrico  $-\sigma$  (corresponde ao prisma da figura pero invertido), logo a onda diverxerá virtualmente do punto  $(x_1 + (n - 1)\sigma z_1, 0, z_1)$ . Lembrar que en xeral  $z_1 = -L < 0$ , onde  $L > 0$ .

### 2.13. DISCONTINUIDADES REFLECTANTES SIMPLES

■ **Función de Reflexión.** Toda discontinuidade xera, ademais dunha onda transmitida, unha onda reflectada (regresiva). Se só hai onda reflectada a discontinuidade é un espello. Para problemas de reflexión a función de reflexión (FdR) xeral para calquera onda paraxial, obtense, coma no caso de transmisión, usando a c.d.c. (S8) entre as ondas incidente e reflectada  $r_1 \mathcal{E}_1(x, y, z_{(1)}) = \mathcal{E}_{2r}(x, y, z_{(1)})$ , con  $r_1 = -(n_2 - n_1)/(n_2 + n_1)$  o coeficiente de reflexión TE (o TM é  $-r_1$ ), e a factorización paraxial  $\mathcal{E}_1(\mathbf{r}) = e^{ik_0 n_1 z} \mathbf{E}_{p1}(\mathbf{r})$ ,  $\mathcal{E}_{2r}(\mathbf{r}) = e^{-ik_0 n_1 z} \mathbf{E}_{p2r}(\mathbf{r})$ . Daquela

$$r(x, y) = r_1 e^{ik_0 2n_1 z_{(1)}(x, y)} \quad (96)$$

Para reflexión progresiva temos  $e^{ik_0 n_2 z_{(1)}} \rightarrow e^{-ik_0 n_2 z_{(1)}}$ , i.e.,  $z \rightarrow -z$ , logo a FdR vén dada pola expresión  $r'(x, y) = r'_1 e^{-ik_0 2n_2 z_{(1)}(x, y)}$ .

**Exem.-Onda reflectada en superficie esférica.** Imos a ilustrar a derivación da FdR con ondas e discontinuidade esféricas, e obter a onda reflectada por c.d.c. Sexa a expresión dunha onda esférica paraxial reflectada nun medio de índice  $n_1$  ( $k_1 = k_0 n_1$ ),

$$\mathcal{E}_{2r}(x, y, z) \simeq \frac{A_{or}}{(z - \tilde{z}_2)} e^{-ik_1 z} e^{-i\{k_1 \frac{(x^2 + y^2)}{2(z - \tilde{z}_2)}\}}, \quad A_{or}, \tilde{z}_2 : \text{ por c.d.c.} \quad (97)$$

-Tendo agora en conta as c.d.c. entre as ondas incidente e reflectada nunha discontinuidade obtemos

$$\frac{r_1 A'_{o1} e^{ik_0 n_1 z_{(1)}}}{(z_{(1)} - z_1)} e^{i\{k_0 n_1 \frac{(x^2 + y^2)}{2(z_{(1)} - z_1)}\}} = \frac{A_{or} e^{-ik_0 n_1 z_{(1)}}}{(z_{(1)} - \tilde{z}_2)} e^{-i\{k_0 n_1 \frac{(x^2 + y^2)}{2(z_{(1)} - \tilde{z}_2)}\}} \quad (98)$$

-Agora consideremos unha fronteira **esférica paraxial**  $z_{(1)} = (x^2 + y^2)/2R$ . Lembremos de novo que  $|z_{(1)}| \ll |z_1|, |\tilde{z}_2|$ , logo a c.d.c. pódese reescribir como

$$\left\{ r_1 e^{i\{k_0 (2n_1) \frac{(x^2 + y^2)}{2R}\}} \right\} \frac{A'_{o1}}{z_1} e^{-i\{k_0 n_1 \frac{(x^2 + y^2)}{2z_1}\}} \approx \frac{A_{or}}{\tilde{z}_2} e^{i\{k_0 n_1 \frac{(x^2 + y^2)}{2\tilde{z}_2}\}} \quad (99)$$

O primeiro factor expresa a acción reflectante sobre a onda esférica, é dicir, define a **Función de Reflexión** (FdR)  $r(x, y)$  (regresiva) da discontinuidade esférica paraxial.

-**Resolución das c.d.c.** (para ondas esféricas paraxiais). Da Ec. (99) temos a continuidade de amplitude  $A_{or} = r_1 A'_{o1} \tilde{z}_2 / z_1$ , semellante á de transmisión (lémbrese que, en moi boa aproximación, **para un espello**  $r_1 \approx e^{i\pi}$ ). Por outra banda, da unicidade de fase na Ec. (99) temos como corolario a coñecida **LdC por reflexión** (idéntica á LdC dun espello),

$$\frac{2n_1}{R} - \frac{n_1}{z_1} = \frac{n_1}{\tilde{z}_2} \rightarrow \frac{1}{\tilde{z}_2} + \frac{1}{z_1} = \frac{2}{R} \rightarrow \tilde{z}_2 = \frac{z_1 R}{(2z_1 - R)} \quad (100)$$

Nótese a **acromaticidade**, i.e., independente de  $n(\lambda_0)$ . Finalmente, a expresión de  $\mathcal{E}_{2r}$  obtense substituíndo os valores achados de  $A_{or}$  e  $\tilde{z}_2$  na Ec. (97).

-No límite  $R \rightarrow \infty$  obtemos a LdC dun **espello plano**, é dicir, de (100) obtemos o resultado:  $\tilde{z}_2 = -z_1$ .

-Asemade, podemos ter discontinuidades reflectantes **cilíndricas** con radios  $R_x$  ou  $R_y$ , esféricas, etc.



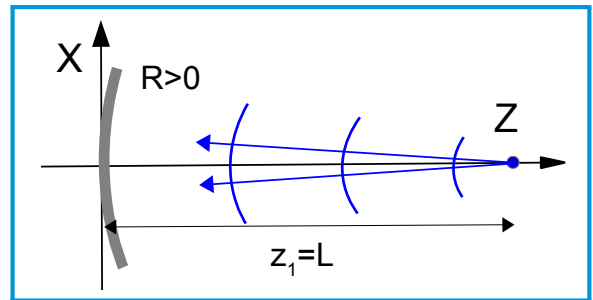
**Exer.- 21** Achar coa c.d.c. a expresión da onda reflectida cando iluminamos unha discontinuidade esférica de radio  $R > 0$  cunha onda regresiva no baleiro procedente do punto  $(0, 0, z_1 = L)$  con f.d.a.  $A_{o1}$  e l.d.o.  $\lambda_o$ .

**Sol.**-Neste caso a onda incidente é regresiva e a reflectida é progresiva, logo o problema de reflexión resólvese coas c.d.c. en  $z = 0$ , usando  $r'(x, y) = r_1 e^{-ik_o 2z(1)}$ ,

$$(r_1 e^{-i\{k_o 2 \frac{(x^2+y^2)}{2R}\}}) \frac{-A'_{o1}}{-L} e^{-i\{k_o \frac{(x^2+y^2)}{-2L}\}} = \frac{A_{o2}}{-\tilde{z}_2} e^{i\{k_o \frac{(x^2+y^2)}{-2\tilde{z}_2}\}}$$

onde o signo  $-$  do numerador é por prescrición de onda regresiva incidente (asegura f.d.a.  $> 0$ ). Da igualdade da fase obtemos:  $-2/R + 1/L = -1/\tilde{z}_2$ , polo tanto  $\tilde{z}_2 = RL / (2L - R)$ , e  $A_{o2} = -r_1 A'_{o1} \tilde{z}_2 / L$ . Daquela, a onda reflectida (progresiva) é

$$\mathcal{E}_{2r}(\mathbf{r}) \simeq r_1 A'_{o1} \frac{\left(\frac{-RL}{2L-R}\right) e^{ik_o z}}{L\left(z - \frac{RL}{2L-R}\right)} e^{i\left\{k_o \frac{(x^2+y^2)}{2\left(z - \frac{RL}{2L-R}\right)}\right\}}$$



Nótese que se  $L = R$  a onda volta a  $L$ .

*Obs.*-Que a discontinuidade sexa un espello ou unha superficie dieléctrica só afecta ao valor de  $r_1$ .

**Exer.- 22** Sexa un espello plano (e.p.) sito no plano yz ( $x=0$ ), e iluminado cunha onda  $z$ -paraxial emerxente de  $(a, 0, -L)$  de l.d.o.  $\lambda_o$  e amplitude  $A_{o1}$ . 22.1.-Achar a onda reflectida  $z$ -paraxial usando c.d.c. 22.2.-Fágase o mesmo estudo para un e.p. en  $x = z$  coa onda esférica anterior, e despois cunha Gaussiana con  $z_1 = -L$ , e  $z_{o1} = k_o w_o^2$ .

**Sol.**-22.1.-Neste caso as c.d.c. son na discontinuidade plana  $x=0$  e veñen dadas pola seguinte relación

$$e^{i\pi} \mathcal{E}_1(0, y, z) = \mathcal{E}_{2r}(0, y, z), \quad \text{logo}$$

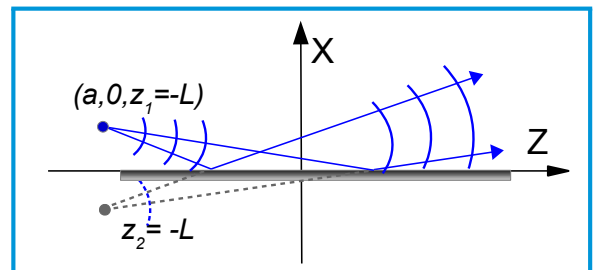
$$\frac{e^{i\pi} A_{o1} e^{ik_o L}}{(z + L)} e^{ik_o z} e^{i\left\{k_o n_1 \frac{[(0-a)^2 + y^2]}{2(z+L)}\right\}} = \frac{A_{or}}{(z - \tilde{z}_2)} e^{ik_o z} e^{i\left\{k_o n_1 \frac{[(0-\tilde{x}_2)^2 + y^2]}{2(z-\tilde{z}_2)}\right\}}$$

Da igualdade de fases obtemos  $\tilde{x}_2 = -a$ ,  $\tilde{z}_2 = -L$  (a solución  $\tilde{x}_2 = a$  é a propia onda incidente), e da igualdade de amplitudes:  $A_{or} = -A_{o1} e^{ik_o L}$ .

Daquela a onda reflectida vén dada pola expresión

$$\mathcal{E}_{2r}(\mathbf{r}) = \frac{-A_{o1} e^{ik_o L}}{(z + L)} e^{ik_o z} e^{i\left\{k_o n_1 \frac{[(x+a)^2 + y^2]}{2(z+L)}\right\}}$$

Logo a onda semella diverxer do punto sito en  $(-a, 0, -L)$  (ver Figura).



-Vector de Poynting: en efecto,  $\mathbf{s}_p \propto (x+a, y, z+L)/(z+L)$ , nótese que  $z+L > 0, \forall z > -L$ , e polo tanto  $\mathbf{s}_p \propto (\mathbf{r} - \tilde{\mathbf{r}}_2)$ , e daquela unha onda diverxente.

*Obs.*-Se non se pedira usar as c.d.c., abondaría con aplicar a LdC dun e.p., é dicir, a transformación especular  $\eta_2 = -\eta_1$  ( $\eta$ : distancia do punto fonte ao e.p. ao longo da normal ao dito e.p.). Neste caso:  $(a, 0, -L) \rightarrow (-a, 0, -L)$ . Hai que usar tamén  $A_{or} = r_1 A'_{o1} \tilde{z}_2 / z_1$ .

**Sol.**-22.2.-Para resolver o apartado téñase en conta que a onda incidente é  $z$ -paraxial, pero a reflectida será  $x$ -paraxial.



■ **Reflexión exacta de ondas esféricas. [C]** A reflexión dunha onda esférica nunha discontinuidade plana dieléctrica ou especular é outra onda esférica. En efecto,

$$\frac{e^{ik_o\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2}}}{\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2}} = \frac{e^{ik_o\sqrt{(x-\tilde{x}_2)^2+(y-\tilde{y}_2)^2+(z-\tilde{z}_2)^2}}}{\sqrt{(x-\tilde{x}_2)^2+(y-\tilde{y}_2)^2+(z-\tilde{z}_2)^2}} \quad (101)$$

P.ex., en  $z = 0$  temos  $\tilde{x}_2 = x_1$ ,  $\tilde{y}_2 = y_1$  e  $\tilde{z}_2 = \pm z_1$ . A solución  $\tilde{z}_2 = z_1$  é a trivial, logo a **solución non-paraxial exacta** é  $\tilde{z}_2 = -z_1$  (onda esférica diverxente virtualmente de  $-z_1$ ). O mesmo procedemento para calquera outro plano.

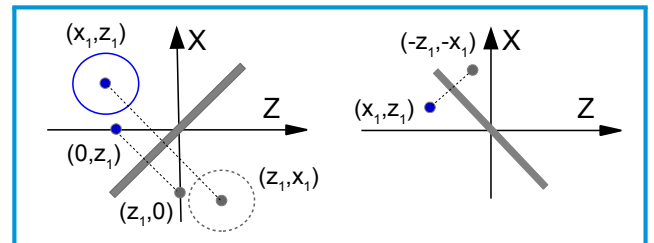
**Exer.- 23 [C]** Sexa unha onda esférica incidindo sobre un espello plano. 23.1.-Achar a expresión exacta da onda esférica reflectida por un espello sito no plano  $x=z$ , iluminado por unha onda esférica emerxente de  $(0,0,z_1)$ ; tamén se emerxe de  $(x_1,0,z_1)$ . 23.2.-Fágase de novo pero para a discontinuidade  $x=-z$ . 23.3.-Sexa agora a onda Gaussiana  $\mathcal{E}_1(x, y, z)=[A'_{og}/(z-z_1-ik_o w_o^2)] \exp\{ik_o(x^2+y^2)/2(z-z_1-ik_o w_o^2)\} \exp\{ik_o z\}$ , achar a onda reflectida na discontinuidade  $z = -x$ .

**Sol.-23.1.-**Tendo en conta a Ec. (101) para  $x=z$  escribimos a continuidade de fase (e daquela de amplitude) como

$$\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2} = \sqrt{(z-\tilde{x}_2)^2+(y-\tilde{y}_2)^2+(x-\tilde{z}_2)^2}$$

Logo a transformación especular é:  $\tilde{x}_2=z_1$ ,  $\tilde{y}_2=y_1$ ,  $\tilde{z}_2=x_1$ . Para  $\mathbf{r}_1=(0, 0, z_1)$  obtemos a solución  $\tilde{\mathbf{r}}_2=(z_1, 0, 0)$ . Para o punto  $\mathbf{r}_1=(x_1,0,z_1)$  obtemos  $\tilde{\mathbf{r}}_2=(z_1,0,x_1)$ , i.e., permutación de coordenadas (ver **Figura**).

**Sol.-23.2.-**Para  $x=-z$ , haberá ademais un cambio de signo, logo a transformación especular é:  $\tilde{x}_2=-z_1$ ,  $\tilde{y}_2=y_1$ ,  $\tilde{z}_2=-x_1$ . Logo se temos  $\mathbf{r}_1=(x_1, 0, z_1)$ , obtemos  $\mathbf{r}_1=(-z_1, 0, -x_1)$ .



**Obs.-**Estes resultados van ser moi útiles para discontinuidades a  $\pi/4$  (ou a  $-\pi/4$ ) usados en interferometría por división de amplitude, coma as implementadas polos divisores de feixe (elementos semirreflectantes).

**Sol.-23.3.-**A onda Gaussiana incidente sobre a discontinuidade vén dada no enunciado, que multiplicada pola f.d.r. do espello  $e^{i\pi}$  debe ser continua coa reflectida (regresiva), cuxa expresión é

$$\mathcal{E}_r(z, y, x) = \frac{A_{og}}{(x-\tilde{x}_2+i\tilde{x}_{o2})} e^{-ik_o\frac{z^2+y^2}{2(x-\tilde{x}_2+i\tilde{x}_{o2})}} e^{-ik_o x}$$

Nótese que por razóns físicas puxemos o valor  $+i\tilde{x}_{o2}$ . Agora aplicando continuidade en  $z \equiv z_{(1)} = -x$  obtemos  $\tilde{x}_2 = -z_1$  e  $\tilde{x}_{o2} = k_o w_o^2$ ,  $A_{og} = A'_{og}$ , logo

$$\mathcal{E}_r(z, y, x) = \frac{A'_{og}}{(x+z_1+ik_o w_o^2)} e^{-ik_o\frac{z^2+y^2}{2(x+z_1+ik_o w_o^2)}} e^{-ik_o x}$$

## 2.14. CAVIDADES ÓPTICAS: ONDAS ESTACIONARIAS

Presentamos mediante Exercicios as características das cavidades ópticas, elementos fundamentais da óptica e a fotónica (láseres, computación cuántica, ...)

**Exer.- 24** Sexa unha cavidade óptica formada por un espello plano en  $z < 0$  e un espello cóncavo en  $z = 0$  e de radio  $R_o$ . Achar as condicións para ter solución estacionaria no baleiro usando un punto luminoso entre os espellos con f.d.a.  $A_{o1}$ .

**Sol.-A** acción do espello esférico en  $z = 0$  sobre a onda procedente de  $z_1$ , achámola coa FdR,

$$\left\{ e^{i\pi} e^{2i\left\{k_o \frac{(x^2+y^2)}{2R_o}\right\}} \right\} \frac{A_{o1} e^{-ik_o z_1}}{z_1} e^{-i\left\{k_o \frac{(x^2+y^2)}{2z_1}\right\}} = \frac{A_{o2}}{\tilde{z}_2} e^{-i\left\{k_o \frac{(x^2+y^2)}{2(-\tilde{z}_2)}\right\}}$$

-A onda é **estacionaria**, é dicir, non cambia dentro da cavidade se:  $\tilde{z}_2 = z_1 < 0$ . Da igualdade de fases  $2/R_o - 1/z_1 = 1/\tilde{z}_2$ , entón  $2/R_o = 2/\tilde{z}_2$ , logo  $\tilde{z}_2 = z_1 = R_o < 0$ , polo tanto é unha onda diverxente de  $z_1 = -L_1 = R_o$  con **incidencia normal local** no espello cóncavo, logo a onda reflectida é **converxente a  $\tilde{z}_2 = R_o$** , e os espellos deben estar separados unha distancia  $L_1 = |R_o|$  (chamada condición **estacionaria transversal**).

-Queda igualar as fases planas de ida e volta, é dicir,  $e^{-2ik_o z_1}$ , logo os f.d.a. inicial e final deben ser iguais:  $e^{i\pi} A_{o1} e^{-2ik_o z_1} \equiv A_{o1}$ , con  $e^{i\pi}$  debido á singularidade (os espellos só fan  $e^{i\pi} e^{i\pi} = 1$ ). Entón debe cumprirse:  $2k_o L_1 - \pi = 2q\pi$ ,  $q \in \mathbb{N}$  ( $L_1 = -R_o$ ), condición **estacionaria lonxitudinal** que define as frecuencias resoantes:  $\omega_q = k_{oq} c = (2q + 1)\pi/2L_1$ .

-É importante indicar que esta solución **non é fisicamente estacionaria** por mor dos efectos do **tamaño finito** dos espellos/ondas, é dicir, do espallamento (difracción) de luz nos bordes. A solución estacionaria precisa que a onda tenda a cero lonxe do eixo, i.e., case nula nos bordes, coma p.ex. no caso dunha función Gaussiana ou H-G.

**Exer.- 25** Tendo en conta o resultado do Exer. 24 achar a solución estacionaria para o caso máis físico dun feixe Gaussiano de l.d.o.  $\lambda_o$ , semianchura mínima  $w_o$  e f.d.a.  $A_{og}$ , determinando a distancia  $d_1$  entre espellos.

**Sol.-** Escribamos a expresión complexa do feixe Gaussiano plano, procedente dun plano  $z_1$  (espello plano), incidente sobre o espello esférico sito en  $z = 0$ ,

$$\mathcal{E}_1(x, y, 0) = \frac{-A'_{og}}{(z_1 + iz_{o1})} e^{-i\left\{k_o \frac{(x^2+y^2)}{2(z_1 + iz_{o1})}\right\}} = \frac{-A_{og} e^{-ik_o z_1} e^{-i\Phi_G(0)}}{|z_1 + iz_{o1}|} e^{-i\left\{k_o \frac{(x^2+y^2)}{2(z_1^2 + z_{o1}^2)}(z_1 - iz_{o1})\right\}}$$

onde  $z_{o1} = k_o w_o^2$  e  $\Phi_G(0) = \text{atn}(-z_1/z_{o1})$ . Agora deberíamos aplicar as c.d.c. no espello. Porén, seguiremos un camiño máis físico, é dicir, o resultado obtido no Exer. anterior,  $z_1 = R_o$ , suxire o que fisicamente debe ocorrer no caso dun **feixe Gaussiano, é dicir, hai que obter incidencia normal local** sobre o espello cóncavo.

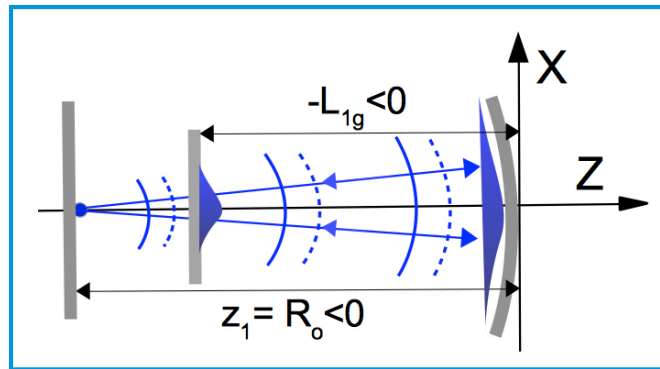
-Polo tanto a solución Gaussiana **estacionaria** obtense cando se cumpla que o radio de curvatura da onda en  $z = 0$  sexa igual a  $R_o$ . Se no caso anterior tiñamos  $z_1 = R_o$  agora temos

$$R_1(0) = (z_1^2 + z_{o1}^2)/z_1 = R_o \Rightarrow z_1^2 - z_1 R_o + z_{o1}^2 = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow z_{1g} = \frac{R_o + R_o \sqrt{1 - 4z_{o1}^2/R_o^2}}{2} > R_o < 0$$

-Por consistencia só vale a solución con signo +, xa que no límite  $z_{o1} = 0$  obtense o resultado anterior con fonte puntual.



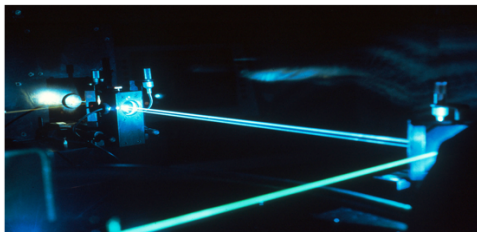
En resumo, a distancia entre espellos é agora menor:  $L_{1g}=|z_{1g}| < |R_o|$  (o que indica que un feixe Gaussiano diverxe menos).



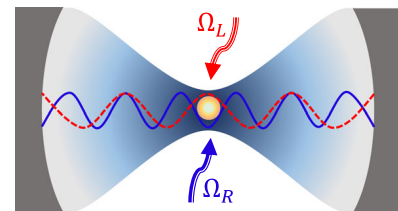
Polo tanto, a onda é **estacionaria transversal** xa que en  $z_{1g} = -L_{1g}$  volvemos ter o feixe Gaussiano **plano** (regresivo) coa mesma  $z_R = z_{o2} = z_{o1}$ , e así **a luz oscila** na cavidade formada polos espellos (oscilador óptico para obter luz Láser: *Light amplification by stimulated emission of radiation*).

-Tamén é **estacionaria lonxitudinal** se  $2k_o L_{1g} - 2\phi_G(0) = 2q\pi$ ,  $q \in \mathbb{N}$  (condición que se obtén do factor de amplitude), con  $\phi_G(0) = \text{atn}(-z_1/z_{o1}) = \text{atn}(L_{1g}/z_{o1})$ . É o que se denomina unha **condición de interferencia constructiva (Tema 2)** entre ondas contrapropagantes. Nótase que no límite  $z_{o1} \approx 0$ ,  $2\phi_G(0) \approx \pi$ , que é o resultado da fonte puntual.

-En conclusión: as condicións obtidas son as necesarias que debe cumprir unha cavidade óptica para producir luz Láser. A primeira afecta á forma espacial do campo, e a segunda ás frecuencias permitidas na cavidade, xa que na condición anterior temos en realidade un **conxunto discreto** de solucións (frecuencias ópticas)  $k_{oq} = \omega_q/c = (\phi_G(0) + q\pi)/L_{1g}$ .



Luz Láser (case-monocromática).



Cavidade para interacción luz-átomo

**-Derivación por c.d.c. [C] Comprobemos** que en efecto obtemos unha solución estacionaria tendo en conta as c.d.c.. A acción dun espello de radio de curvatura  $R$  é

$$\left\{ e^{i\pi} e^{i\left\{k_o \frac{2(x^2+y^2)}{2R}\right\}} \right\} \frac{A_{o1} e^{-ik_o z_1}}{(z_1 + iz_{o1})} e^{i\left\{k_o \frac{(x^2+y^2)}{-2(z_1+iz_{o1})}\right\}} = \frac{A_{o2}}{(\tilde{z}_2 - iz_{o2})} e^{-i\left\{k_o \frac{(x^2+y^2)}{-2(\tilde{z}_2 - iz_{o2})}\right\}}$$

onde usamos unha **Gaussiana regresiva con  $\tilde{z}_2 - iz_{o2}$  onde  $\tilde{z}_{o2} > 0$**  para ter unha Gaussiana con fase plana en  $z = \tilde{z}_2$  e fisicamente consistente. Da unicidade da “fase complexa” local obtemos

$$\frac{2}{R} + \frac{-1}{(z_1 + iz_{o1})} = \frac{1}{(\tilde{z}_2 - iz_{o2})}$$

Se impoñemos as condicións  $\tilde{z}_2 = z_1$  e  $\tilde{z}_{o2} = z_{o1}$ , é dicir, os valores que definen unha onda estacionaria, entón ó substituílos na ecuación anterior obtense o valor  $R = (z_1^2 + z_{o1}^2)/z_1$ . Se  $R = R_o$  obtemos de novo a solución  $z_1 = -L_{1g}$  achada arriba.

### 2.15. DISCONTINUIDADES EN METAMATERIAIS [C]

■ **Superlente e refracción negativa.** Un dos metamateriais máis interesantes son os isótropos de índice negativo  $n < 0$ , i.e.,  $\epsilon, \mu < 0$  (a xustificación física macroscópica farase despois coas Ecs.de Maxwell).

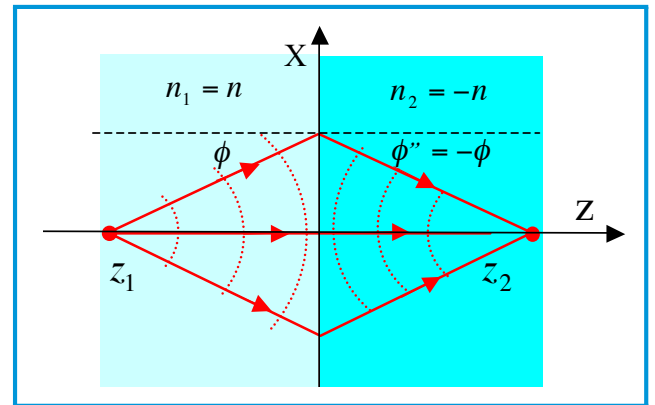
Sexa, p.ex., unha discontinuidade plana en  $z=0$ , con  $n_1 > 0$  e  $n_2 < 0$  ( $n_2 = -|n_2|$ ), entón temos o problema de fronteira

$$\frac{2n_1}{(n_1 + |n_2|)} \frac{A_{o1}}{z_1} e^{i\{k_o n_1 \frac{(x^2+y^2)}{-2z_1}\}} = \frac{A_{o2}}{z_2} e^{i\{k_o (-|n_2|) \frac{(x^2+y^2)}{-2z_2}\}} \quad (102)$$

logo  $-n_1/z_1 = |n_2|/z_2$ , entón  $z_2 = -( |n_2|/n_1)z_1 = (n_2/n_1)z_1$  (**LdC do metamaterial**), é dicir, obtense unha onda converxente (imaxe real) cunha discontinuidade plana. No caso  $n_1=1$  e  $n_2=n=-|n|$  temos  $z_2=-|n|z_1$ . Nótese que para  $0 < z < n z_1$  é converxente xa que o vector de Poynting é  $\mathbf{s}_p = \nabla \mathcal{L}_p / n_2 \propto (x, y, z - n z_1) / (z - n z_1) \propto (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r})$ .

-O metamaterial funciona coma unha lente (ver Figura). Con dúas discontinuidades obteríase unha lente (**Exer**) (en realidade obtense unha **superlente**, Veselago, 1967).

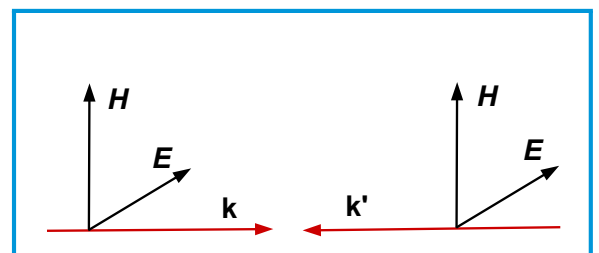
■ **Refracción negativa.** Sexa unha onda plana paraxial incidente con  $\mathbf{k}$  no plano xz. O problema de fronteira é:  $t_1 E_{o1} e^{i k_o n_1 \phi x} = E_{o2} e^{i k_o n_2 \phi'' x}$ . Da fase obtemos  $n_1 \phi \approx -|n_2| \phi''$ , é dicir, **refracción negativa** (ver Figura). Se  $n_1 = -n_2 = n$ , transfórmase nunha liña de fluxo refractada baixo un ángulo  $\phi'' = -\phi$ . Con ondas planas exactas obtense  $n_1 \sin \phi = -|n_2| \sin \phi''$ .



■ **Concepto de índice negativo.** As ecuacións de Maxwell de evolución para ondas planas (e LP) harmónicas son

$$\mathbf{k} \wedge \mathbf{E} = \omega \mu \mathbf{H}, \quad \mathbf{k} \wedge \mathbf{H} = -\omega \epsilon \mathbf{E} \quad (103)$$

Polo tanto,  $\{\mathbf{E} \mathbf{H} \mathbf{k}\}$  forman un triplete vectorial a dereitas, onde  $\mathbf{k} = k_o n_o \mathbf{s}$  (ver Figura). Ademais o vector de Poynting é  $\mathbf{S} = \mathbf{E} \wedge \mathbf{H} > 0$ .



-Supoñamos agora que temos un **metamaterial con  $-\epsilon < 0$  e  $-\mu < 0$** , entón as ecuacións de Maxwell son

$$\mathbf{k}' \wedge \mathbf{E} = -\omega \mu \mathbf{H}, \quad \mathbf{k}' \wedge \mathbf{H} = \omega \epsilon \mathbf{E} \quad (104)$$

Neste caso os vectores  $\{\mathbf{E} \mathbf{H} \mathbf{k}'\}$  forman un triplete vectorial a esquerdas (ver Figura). Daquela, obtemos

$$\mathbf{k}' = -\mathbf{k} = -k_o n_o \mathbf{s} = k_o (-n_o) \mathbf{s} \quad (105)$$

é dicir, ao metamaterial se lle **asigna un valor negativo do índice**,  $n = -n_o$ , onde  $n_o$  é positivo, é dicir,  $n_o = |n| = \sqrt{(-\epsilon_r)(-\mu_r)} > 0$ , e Poynting segue a ser  $\mathbf{S} = \mathbf{E} \wedge \mathbf{H} > 0$ .

Obs.-As Ecs. de Fresnel serían as de medios con distinta permeabilidade magnética.



## S1.-INTERACCIÓN CLÁSICA LUZ-MATERIA

Nun medio material unha carga ligada  $q = -e$  presenta o seguinte **momento dipolar**  $\mathbf{p} = -e\mathbf{r}$  onde  $\mathbf{r}$  é a desviación da súa posición de equilibrio. Agora, se temos unha densidade de carga  $\mathcal{N}$  constante, é dicir, homoxénea (podería ser  $\mathcal{N}(\mathbf{r})$ , e daquela inhomoxénea), a **polarización por u.d.v.** será:

$$\mathbf{P} = \mathcal{N}\mathbf{p} = \mathcal{N}q\mathbf{r} = -e\mathcal{N}\mathbf{r} \quad (106)$$

Lembrando agora que a polarización  $\mathbf{P}$  atópase vencellada macroscopicamente ó campo na forma

$$\mathbf{P} = \mathbf{D} - \epsilon_0\mathbf{E} = \epsilon_0(\epsilon_r - 1)\mathbf{E} \quad (107)$$

agora, igualando as ecuación anteriores e usando a relación de Maxwell  $n^2 = \epsilon_r$ , obtemos a seguinte relación entre o campo óptico e a a posición da carga,

$$-e\mathcal{N}\mathbf{r} = \epsilon_0(n^2 - 1)\mathbf{E}$$

Daquela, a permitividade eléctrica, e daquela o índice do medio, obterase determinando a desviación da posición de equilibrio  $\mathbf{r}$  da carga cando sofre a acción (forza) do campo  $\mathbf{E}$  (harmónico) presente no medio onde está a dita carga. Para determina-la dita desviación usámo-lo **modelo clásico** (Newton), e sen perda algunha de xeralidade restrinxímo-lo estudo ó caso **unidimensional**  $\mathbf{r} = x\mathbf{u}_x$ .

Supomos as seguintes forzas: a forza de **enlace** da carga á materia (modelo de oscilador harmónico:  $\omega_o$  é a chamada frecuencia de resonancia, e  $m$  é a masa da carga); unha forza de **amortecemento**; e finalmente a compoñente  $x$  da forza eléctrica do campo, en notación complexa,  $F_x = -eE_x = -eE_0e^{-i\omega t}$  (forza de **Lorentz**), onde  $E_0$  é o valor do campo no “punto” (átomo) considerado. A suma de todas elas satisfice a 2ª Lei de Newton.

Tendo en conta as forzas anteriores, a segunda Lei de Newton porporciona unha ecuación diferencial que en notación complexa é

$$-m\omega_o^2x - m\gamma\dot{x} - e(E_0e^{-i\omega t}) = m\ddot{x} \quad (108)$$

Esta ecuación ten unha solución transitoria e outra estacionaria (longos tempos) de interés óptico. Daquela é doado probar que dita solución particular é:

$$x(t) = x_0e^{-i\omega t}, \quad x_0 = -\frac{eE_0}{m(\omega_o^2 - \omega^2 - i\omega\gamma)} \quad (109)$$

sustituíndo  $E_x(t) = E_0e^{-i\omega t}$  e  $x(t)$  na ecuación da polarización obtémo-la seguinte expresión para a permitividade eléctrica, e daquela para o **índice de refracción**:

$$\epsilon_r = n^2 = 1 + \frac{\mathcal{N}e^2}{\epsilon_0m} \frac{1}{\omega_o^2 - \omega^2 - i\omega\gamma} \equiv 1 + \chi_p \quad (110)$$

Nótese que **se  $\mathcal{N}(\mathbf{r})$  entón  $\epsilon_r(\mathbf{r})$ , é dicir,  $n(\mathbf{r})$** . Se ademais houbera cargas con  $\omega_o=0$  (cargas libres, é dicir, conductores) entón teríamos unha  $\chi_\sigma$ , logo en xeral

$$n^2 = 1 + \chi_p + \chi_\sigma$$

Temos así “sintetizados” un gran conxunto de medios ópticos: os lineais **isótropos e dieléctricos e/ou conductores** ( $\omega_o=0$ ); os **homoxéneos e inhomoxéneos** se  $\mathcal{N}(\mathbf{r})$ , é dicir,  $n(\mathbf{r})$ ; os **dispersivos**  $n(\omega)$ ; os lineais **anisótropos** se considerásemos un problema opto-mecánico 3D, como por exemplo,  $\omega_{ox} \neq \omega_{oy} = \omega_{oz}$  (medios uniaxiais); e finalmente **non lineais** (correccións anharmónicas  $x^n$ ).

## S2.-TEORÍA DE MAXWELL PARA ONDAS LP

**S2.1.-Ecuacións de Maxwell Asintóticas.** Consideremos agora as expresións dos campos eléctrico e magnético de ondas LP complexas harmónicas, é dicir,

$$(\mathbf{E}(\mathbf{r}, t), \mathbf{H}(\mathbf{r}, t)) = (\mathcal{E}(\mathbf{r}), \mathcal{H}(\mathbf{r})) e^{-i\omega t} = (\mathbf{E}(\mathbf{r}), \mathbf{H}(\mathbf{r})) e^{i\{k_o \mathcal{L}(\mathbf{r}) - \omega t\}} \quad (111)$$

onde  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ ,  $\mathbf{H}(\mathbf{r})$  e  $\mathcal{L}(\mathbf{r})$  son as funcións de **amplitude e fase** a determinar. Sustituíndo nas ecuacións de Maxwell os campos harmónicos (111) en medios **inhomoxéneos (febles)** e isotropos ( $\epsilon(\mathbf{r})$ ): atmosfera, fibras ópticas, ...), temos

$$\nabla \wedge \mathbf{E} = -\mu_o \partial \mathbf{H} / \partial t \Leftrightarrow \nabla \wedge \mathcal{E} = i\omega \mu_o \mathcal{H} \quad (112)$$

$$\nabla \wedge \mathbf{H} = \epsilon \partial \mathbf{E} / \partial t \Leftrightarrow \nabla \wedge \mathcal{H} = -i\omega \epsilon \mathcal{E} \quad (113)$$

$$\nabla \mathcal{D} = \nabla \mathbf{H} = 0 \Leftrightarrow \nabla \mathcal{D} = \nabla \mathcal{H} = 0 \quad (114)$$

Usando agora identidades vectoriais axeitadas (\*) e desprezando tódolos termos de **orde  $\lambda_o$** , obtéñense as chamadas Ecuacións de Maxwell para *l.d.o.* curtas, ou asymptóticas, ou WKB (Wentzel–Kramers–Brillouin) ou case-xeométricas (CX),

$$\nabla \mathcal{L} \wedge \mathbf{E} - c\mu_o \mathbf{H} = i(\nabla \wedge \mathbf{E})/k_o \simeq 0 \quad (\text{LIF-LP}) \quad (115)$$

$$\nabla \mathcal{L} \wedge \mathbf{H} + c\epsilon \mathbf{E} = i(\nabla \wedge \mathbf{H})/k_o \simeq 0 \quad (\text{LAM-LP}) \quad (116)$$

$$\nabla \mathcal{E} \simeq \mathbf{E} \cdot \nabla \mathcal{L} \simeq 0 \quad (\text{LGE-LP}); \quad \mathbf{H} \cdot \nabla \mathcal{L} \simeq 0 \quad (\text{LGM-LP}) \quad (117)$$

onde LIF: Lei de Inducción de Faraday, LAM: Lei de Ampere-Maxwell; LGE: Lei de Gauss Eléctrica; LGM: Lei de Gauss Magnética.

(\*) Identidades vectoriais:  $\nabla \wedge (f\mathbf{E}) = (\nabla f) \wedge \mathbf{E} + f(\nabla \wedge \mathbf{E})$ ;  $\nabla (f\mathbf{E}) = (\nabla f)\mathbf{E} + f(\nabla \mathbf{E})$ ;  $\mathbf{E} \wedge (\mathbf{B} \wedge \mathbf{C}) = -(\mathbf{E}\mathbf{B})\mathbf{C} + (\mathbf{E}\mathbf{C})\mathbf{B}$ .

**S2.2.-Raios de luz e vector de Poynting.** A expresión do valor medio temporal do vector de **Poynting exacto** para ondas harmónicas e LP é

$$\langle \mathbf{S} \rangle = (1/2) \mathcal{R}(\mathbf{E} \wedge \mathbf{H}^*) \simeq (2c\mu_o)^{-1} \{(\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^*) \nabla \mathcal{L} - (\mathbf{E} \cdot \nabla \mathcal{L}) \mathbf{E}^*\} \quad (118)$$

onde usamos a LIF-LP. Obsérvase que o segundo termo é nulo en virtude da ecuación (117) (LGE-LP) (transversalidade local), logo obtemos **Poynting para LP**,

$$\langle \mathbf{S} \rangle \simeq \frac{1}{c\epsilon\mu_o} \left( \frac{1}{2} \epsilon \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^* \right) \nabla \mathcal{L} = \frac{c}{n} \langle u \rangle \frac{\nabla \mathcal{L}}{n} = v \langle u \rangle \mathbf{s} \quad (119)$$

-Logo as normais (locais) ás superficies da onda LP dan en xeral a dirección de fluxo enerxético  $\mathbf{s}$  (vector de Poynting unitario), e a súa envolvente dá a **traxectoria da enerxía** luminosa (liñas de fluxo).

-Daquela, o **significado opto-físico** dos raios de luz é o de seren as envolventes dos vectores de Poynting (locais) unitarios das ondas LP. Para ondas máis complexas dita relación non se cumpre (deixaría de ser válida a OX, a cal tamén deixará de ser válida en interferencia, difracción, etc).

-Por outra banda, a **velocidade** da (normal de) onda é igual á da enerxía  $v$  (temos que suñar que hai medios nos que isto non se cumpre: anisótropos, metamateriais, ...).

-Obteríamos idénticos resultados con ondas Case-Harmónicas (CH), inda que quedaría por achar o promedio na **envolvente temporal** da onda, é dicir,  $\langle u \rangle \propto \langle \mathbf{E}(t) \cdot \mathbf{E}^*(t) \rangle$ .

**S2.3.-Solución Eikonal (WKB-óptica).** Tomando rotacional na segunda Ec.(112) e usando a segunda Ec.(113), obtemos a ecuación vectorial de ondas luminosas harmónicas

$$\nabla \wedge (\nabla \wedge \mathcal{E}) \{ = -\nabla^2 \mathcal{E} + \nabla (\nabla \cdot \mathcal{E}) \} = i\omega \mu_o (\nabla \wedge \mathcal{H}) \{ = \omega^2 \mu_o \epsilon \mathcal{E} \} \quad (120)$$

onde se define  $\omega^2 \mu_o \epsilon = k_o^2 n^2$ . Tendo en conta a Ec. (117),  $\nabla \cdot \mathcal{E} \approx 0$ , obtemos a **Ecuación Escalar de Ondas (EEO)** espacial ou de Helmholtz

$$\boxed{\nabla^2 \mathcal{E} + k_o^2 n^2 \mathcal{E} \approx 0} \quad (121)$$

Escalar significa non acoplamento das compoñentes de  $\mathcal{E}$ . Se substituímos  $\mathcal{E}$  da Ec. (111) na EEO dá  $\nabla (\nabla \cdot E e^{ik_o \mathcal{L}} + ik_o \nabla \mathcal{L} E e^{ik_o \mathcal{L}}) + k_o^2 n^2 E e^{ik_o \mathcal{L}} = 0$ , logo

$$\nabla^2 E + \{ 2ik_o \nabla \mathcal{L} \cdot \nabla E + ik_o \nabla^2 \mathcal{L} E \} - k_o^2 (\nabla \mathcal{L})^2 E + k_o^2 n^2 E = 0. \quad (122)$$

O primeiro termo é de orde  $k_o^0$ , logo desprezable. O termo en  $k_o^2$  dá a Ec. eikonal, e o termo en  $k_o^1$  dá a da amplitude. Nótese que é a mesma ecuación que se obtén por conservación da enerxía. Logo a solución é **exacta até a orde 1/ $k_o^2$** .

Resolvendo os termos en  $k_o^1$  obtemos a amplitude. Para iso ultiplicamos por  $\nabla \mathcal{L} dr$  e temos

$$2 \nabla E(\mathbf{r}) \cdot \nabla \mathcal{L} \nabla \mathcal{L} dr + (\nabla^2 \mathcal{L}) E(\mathbf{r}) \nabla \mathcal{L} dr = 0$$

tendo en conta que  $\nabla E(\mathbf{r}) dr = dE$  e  $(\nabla \mathcal{L})^2 = n^2$ , obtemos a amplitude e daquela a solución eikonal (WKB-óptico) do campo óptico,

$$\boxed{\mathcal{E}(\mathbf{r}) = E(\mathbf{r}) e^{ik_o \mathcal{L}(\mathbf{r})} = \left( A_o e^{-\int \frac{\nabla^2 \mathcal{L}}{2n^2} \nabla \mathcal{L} dr} \right) e^{ik_o \mathcal{L}(\mathbf{r})} \quad (123)}$$

### S3.-OPTICA DE ELECTRÓNS LP

- **Solución Eikonal en Óptica de Electróns.** A ecuación de Schroedinger para ondas monoenerxéticas ( $E$ ) de partículas cargadas de masa  $m$  nun potencial  $V(\mathbf{r})$  é

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi + V(\mathbf{r}) \psi = i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = E \psi \quad (124)$$

logo

$$\nabla^2 \psi + \kappa_o^2 n_e^2(\mathbf{r}) \psi = 0, \quad n_e^2(\mathbf{r}) = 2m[E - V(\mathbf{r})] \equiv p_e \quad (125)$$

con  $\kappa_o = 1/\hbar$  (que xoga o papel de  $k_o$ ) e  $p_e$  o momento lineal. Esta ecuación é análoga á EEO, logo as solucións eikonais para as **ondas cuánticas**, p.e., de electróns (microscopía electrónica, ...), serían idénticas ás obtidas para a luz.

-Inversamente, tendo en conta a teoría eikonal, obtemos o Ppio. de Fermat para partículas cargadas,

$$\mathcal{L}_e = \int n_e ds = \int 2m[E - V]^{1/2} ds = \int p_e ds = \int p \frac{dr}{ds} dr = \int \mathbf{p}_e dr \quad (126)$$

que non é máis que o Principio de Mínima Acción ou de Maupertius. A solución eikonal é a mesma que a do caso da luz pero cambiando  $\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}_e$  e  $k_o \equiv 1/\lambda_o \rightarrow \kappa_o = 1/\hbar$ .

-**Solución Eikonal Formal para Fotóns.** É interesante ver que usando a definición cuántica do momento de un fotón  $\mathbf{p} = \hbar \mathbf{k} = \hbar k_o n \mathbf{s}$ , e a solución eikonal cuántica, obtemos

$$\psi \propto e^{(i/\hbar) \int \mathbf{p} dr} = e^{i \int \mathbf{k} dr} = e^{ik_o \int n s dr} = e^{ik_o \int n ds} \quad (127)$$

onde o exponente é a integral de Fermat para a luz obtida de primeiros principios cuánticos.

## S4.-OPTICA GRAVITACIONAL

**Solución Eikonal en Óptica gravitacional.** A luz segue as xeodésicas nulas (xa que a luz propágase a  $c$ ), é dicir,  $d\sigma^2 = ds^2 - c^2 dt^2 = 0$ . Sexa un caso xeral simple e realista de xeometría gravitacional descrita pola métrica  $d\sigma^2 = g_s(\mathbf{r})(dx^2 + dy^2 + dz^2) - c^2 g_t(\mathbf{r}) dt^2 = 0$ , con  $g_{xx}=g_{yy}=g_{zz}=g_s(\mathbf{r})$  e  $g_{tt}=g_t(\mathbf{r})$ , logo

$$\mathcal{L}_g = \int c dt = \int [g_s(\mathbf{r})/g_t(\mathbf{r})]^{1/2} ds \equiv \int n_g(\mathbf{r}) ds \quad (128)$$

Isto permite entender o fenómeno das **lentes gravitacionais**, responsables da **deflexión** gravitacional da luz (útil para detectar materia escura), as **ondas gravitacionais**, etc. A EEO obtense co operador D'Alembert para

$$\square^2 E = \frac{1}{\sqrt{-|g|}} \frac{\partial}{\partial x^\mu} (\sqrt{-|g|} g^{\mu\nu} \frac{\partial E}{\partial x^\nu}) \quad (129)$$

onde

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} g_s(\mathbf{r}) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & g_s(\mathbf{r}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g_s(\mathbf{r}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -g_t(\mathbf{r}) \end{pmatrix} \quad (130)$$

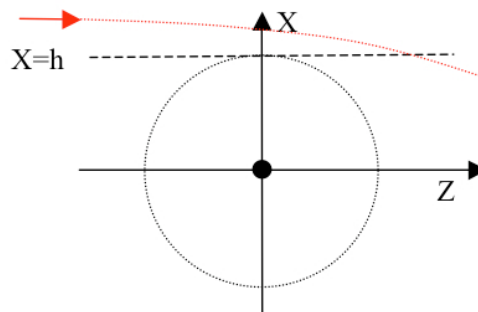
Achando  $g^{\mu\nu}$ , obtemos a seguinte ecuación escalar de ondas aproximada para luz propagándose nun campo gravitacional con índice gravitacional  $n_g$  feble (MIF efectivo),

$$\nabla^2 E - \frac{n_g^2}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} \approx 0, \quad \{E = \mathcal{E} \exp\{-i\omega t\}\} \rightarrow \nabla^2 \mathcal{E} + k_o^2 n_g^2 \mathcal{E} \approx 0 \quad (131)$$

Indicar tamén que hai tensores métricos anisótropos, como ocorre no caso de ondas gravitacionais. P.e.,  $g_{yy}=1=-g_{tt}$ ,  $g_{xx}=1+h$ ,  $g_{zz}=1-h$ ,  $g_{xz}=g_{zx}=h'$ .

## S5.-DEFLEXIÓN GRAVITACIONAL DA LUZ

**Imos facer un estudo ondulatorio da deflexión gravitacional.** Na aproximación de campo gravitacional feble unha distribución de masa con potencial Newtoniano  $\Phi$  ten un índice gravitacional relativista dado por  $n_g = [g_s(\mathbf{r})/g_t(\mathbf{r})]^{1/2} = 1 - 2\Phi/c^2$  (caso particular da métrica de Schwarzschild, ver, p.ex., *Am. J. Phys.* **64**, 45, 1996). Nótese que o **índice gravitacional é feble** ( $1/c^2$ ). Para unha masa case puntual  $M$  (ou unha rexión esférica case-homoxénea de radio  $r_M$ )  $\Phi = -GM/r$ . Imos analizar, sen perda de xeralidade, a propagación da luz no plano xz, e ó redor dunha rexión (franja)  $x \approx h$  (con  $h > r_M$ ), é dicir ao redor do punto  $(x, y, z) \approx (h, 0, z)$



Chamando  $a_o = 2MG/c^2$ , o potencial no plano xz, e daquela o **índice gravitacional**, pódese aproximar ó redor da dita franxa (Taylor) como segue

$$n_g = 1 + \frac{a_o}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \approx 1 + \frac{a_o}{(h^2 + z^2)^{1/2}} - \frac{a_o h}{(h^2 + z^2)^{3/2}} (x - h) \quad (132)$$

que ten a forma  $n_g(x, y, z) = n_o(z) - n_1(z)x$ , con  $n_o(z) = 1 + n_b(z)$ , i.e., unha aproximación lineal do índice gravitacional. Nótese que a orde lineal en  $y$  é nula.

**Solución Eikonal.** Nesta aproximación lineal en  $x$  a solución ondulatoria eikonal (ou WKB-óptica) no campo (lente) gravitacional feble, con vectores locais  $s$  pretos da dirección  $z$  (luz incidente case-plana ao redor de  $(x, y)=(h, 0)$  e ao longo de  $z$ ), vén dada por

$$\mathcal{E}(\mathbf{r}) \approx \{E_o/\sqrt{n_g(\mathbf{r})}\} e^{ik_o \int_{z_o}^z n_g(\mathbf{r}) dz} \quad (133)$$

A integral faise entre un plano  $z_o \ll 0$  moi lonxe do **campo gravitacional (rexión de interacción)**, e un plano  $z$  tamén lonxe do campo. Da Ec. (132) temos que a primeira integral da fase dá  $k_o(z - z_o)$ . En canto ao termo que vai con  $x$ , obtemos

$$-\int_{z_o}^z n_1(z) dz = -\int_{z_o}^z \frac{a_o h x}{(h^2 + z^2)^{3/2}} dz \approx -\frac{2a_o x}{h} \left\{ \frac{z}{2\sqrt{h^2 + z^2}} + \frac{1}{2} \right\} = -\frac{2a_o x}{h} f_1(z) \quad (134)$$

onde consideramos unha evolución moi lenta na rexión de interacción ( $x$  cambia pouco), e o límite  $|z_o| \gg 1$ . Nótese que se  $z \gg 1$  obtemos  $-2a_o x/h$ . Finalmente, os termos que non van con  $x$ , dan, usando  $|z_o| \gg 1$  e  $z \gg 1$ ,

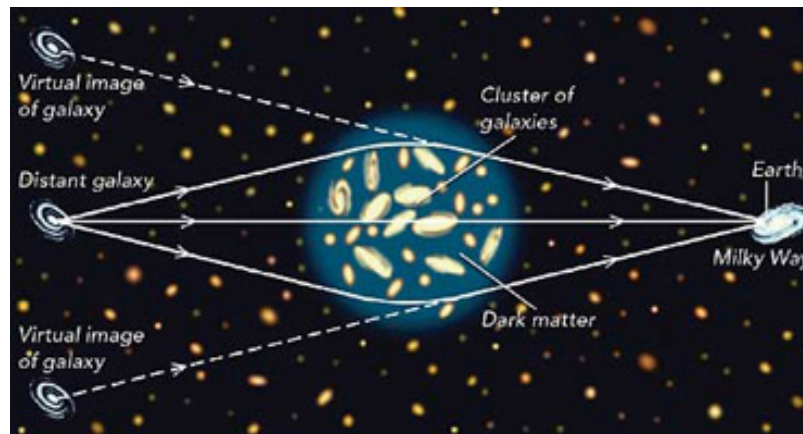
$$\int_{z_o}^z n_b(z) dz = \int_{z_o}^z \left\{ \frac{a_o}{(h^2 + z^2)^{1/2}} + \frac{a_o h^2}{(h^2 + z^2)^{3/2}} \right\} dz \approx a_o \ln\left(\frac{4z|z_o|}{h^2}\right) + 2a_o = f_o(z) \quad (135)$$

Logo a onda é

$$\mathcal{E}(\mathbf{r}) = \{E_o/\sqrt{n_g(\mathbf{r})}\} e^{ik_o(z-z_o)} e^{-ik_o(2a_o/h)x f_1(z)} e^{k_o f_o(z)} \quad (136)$$

que é unha **onda case-plana**. A longas distancias dá o vector de onda local  $\mathbf{k} \approx k_o(-2a_o/h, 0, 1)$ , onde usamos  $\mathbf{k} \approx k_o(\partial L/\partial x, \partial L/\partial y, \partial L/\partial z)$ , e obtemos a **deflexión gravitacional da luz**  $-2a_o/h$ . Obviamente, neste límite  $E(\mathbf{r})=E_o$ . Isto produce posición aparente da fonte luminosa, o que á súa vez permite estimar a cantidade de **materia escura**. Os resultados obtidos son tamén aplicabeis á óptica atmosférica.

**Lente gravitacional.** Deflexión da luz por lente gravitacional (clúster de galaxias), estimando un 20-30 % de materia escura. Materia ordinaria 4 % e o resto enerxía escura (70-80 %) (un grande reto para a Física moderna).



-Nótese que para poder describir a deflexión gravitacional que se mostra na Figura (en realidade imaxe gravitacional) precisamos usar ondas planas (procedentes de fontes moi distantes) “inclinadas” representadas polo campo  $\mathcal{E} = E_o e^{ik_o(\sin \alpha x + \cos \alpha z)}$ . Para un campo gravitacional con simetría esférica o cálculo é idéntico ao caso  $\mathcal{E} = E_o e^{ik_o z}$  baixo unha rotación  $\alpha$ . Ademais, se  $\alpha \ll 1$  a solución é a mesma salvo a fase  $e^{ik_o \alpha x}$ . Este cálculo permitiría xustificar tamén a observación dos aneis de Einstein, tendo en conta que a solución achada é válida para todo plano obtido coma un xiro do plano  $xz$ .

## S6.-DISCONTINUIDADES ESFEROCILÍNDRICAS

**-Ondas paraxiais esferocilíndricas.** O feito antes pódese estender a ondas paraxiais cilíndricas e esferocilíndricas, xunto con discontinuidades-lentes cilíndricas e esferocilíndricas. Lembremos que a expresión paraxial dunha **onda x-cilíndrica**, emerxendo dunha fonte lineal en  $\{x = x_1, z = z_1\}$ , é

$$\mathcal{E}_1(x, z) = \frac{A'_{o1}}{(z - z_1)^{1/2}} e^{ik_1 z} e^{ik_1 \frac{(x-x_1)^2}{2(z-z_1)}} \quad (137)$$

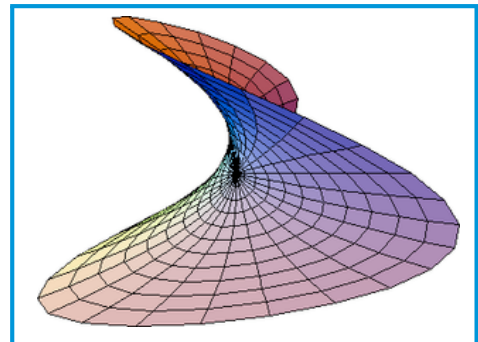
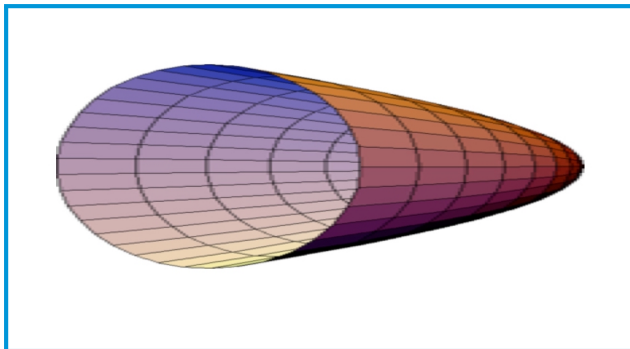
Unha **onda esferocilíndrica** pódese definir como unha composición de dúas cilíndricas de distinta curvatura (inverso da distancia da fonte a un plano de referencia). As superficies de fase constante serían en xeral **paraboloides elípticos ou hiperbólicos** (“cadeira de montar”). A expresión destas ondas será en xeral:

$$\mathcal{E}_1(x, y, z) = \frac{A'_{o1}}{(z - z_{1x})^{1/2}(z - z_{1y})^{1/2}} e^{ik_1 z} e^{ik_1 \frac{(x-x_1)^2}{2(z-z_{1x})}} e^{ik_1 \frac{(y-y_1)^2}{2(z-z_{1y})}} \quad (138)$$

Por analogía teremos ondas esferocilíndricas emerxentes de discontinuidades (en xeral tamén esferocilíndricas), é dicir, ondas converxentes e/ou diverxentes de fontes lineais en  $(x_2, z_{2x})$  e  $(y_2, z_{2y})$ :

$$\mathcal{E}_2(x, y, z) = \frac{A_{o2}}{(z_{2x} - z)^{1/2}(z_{2y} - z)^{1/2}} e^{ik_2 z} e^{ik_2 \frac{(x-x_2)^2}{2(z-z_{2x})}} e^{ik_2 \frac{(y-y_2)^2}{2(z-z_{2y})}} \quad (139)$$

Na Figura móstranse superficies de onda en forma de paraboloide elíptico (onda converxente a dous focos lineais) e paraboloide hiperbólico (onda conxerxente a un foco lineal e diverxente doutro foco lineal).



**-Dioptrios e lentes esferocilíndricas.** Asemade, obtéñense funcións de transmisión de discontinuidades esferocilíndricas no baleiro da forma

$$t(x, y) = e^{ik_o n d_o} e^{-ik_o n_2 \left( \frac{x^2}{2f_x} + \frac{y^2}{2f_y} \right)} \quad (140)$$

Os problemas sempre son factorizables en direccións ortogonais  $x$  e  $y$  habendo unha **lei de conxugación para cada dirección** do espazo, *p.e.*, no baleiro teríamos as seguintes LdC  $1/z_{2x} - 1/z_{1x} = 1/f_x$ ,  $1/z_{2y} - 1/z_{1y} = 1/f_y$ . Estas funcións de transmisión pódense implementar con lentes esféricas e cilíndricas delgadas.

## S7.-ONDAS NON-PLANAS EN ANISÓTROPOS

**S7.1.-Superficies de onda (de raio).** Precisaríamos achar a fase  $L$  de acordo coas ecuacións de onda correspondentes. Pero imos seguir o camiño de Fresnel, que no fondo é unha aproximación de onda plana local. Ademais, imos centrarnos no caso de medios uniáxicos, é dicir, con velocidades principais  $v_y = v_z = v_o$  e  $v_x = v_e$ . Lembremos a **ecuación de Fresnel de raio (enerxía)**,

$$\frac{u^2 s_x^2 v_x^2}{v_x^2 - u^2} + \frac{u^2 s_y^2 v_y^2}{v_y^2 - u^2} + \frac{u^2 s_z^2 v_z^2}{v_z^2 - u^2} = \frac{u^2 s_x^2 v_e^2}{v_e^2 - u^2} + \frac{u^2 s_y^2 v_o^2}{v_o^2 - u^2} + \frac{u^2 s_z^2 v_o^2}{v_o^2 - u^2} = 0, \quad (141)$$

onde  $s$  é unha dirección arbitraria do espazo. Considerando un punto emisor en  $(0, 0, 0)$ , e  $us_x = u_x = x/t$ ,  $us_y = u_y = y/t$ ,  $us_z = u_z = z/t$  e  $u = r/t$ , obtemos

$$[x^2 v_e^2 (v_o^2 t^2 - r^2) + y^2 v_o^2 (v_e^2 t^2 - r^2) + z^2 v_o^2 (v_e^2 t^2 - r^2)] [v_o^2 t^2 - r^2] = 0 \quad (142)$$

Da ecuación anterior obtemos **dúas solucións** asociadas á cancelación de cada factor. Tendo en conta que  $t = L_o/c$  e  $t = L_e/c$  obtemos as seguintes superficies de **onda ordinaria e extraordinaria**

$$\mathcal{L}_o = \pm \frac{c}{v_o} r = \pm n_o \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \mathcal{L}_e = \pm \sqrt{n_o^2 x^2 + n_e^2 (y^2 + z^2)} \quad (143)$$

onde  $\pm$  indican ondas esféricas progresivas e regresivas. Se  $n_o^2 > 0$  e  $n_e^2 > 0$  entón temos **ondas elipsoidais**. Porén, tamén hai materiais con  $n_o^2 < 0$  e  $n_e^2 > 0$  (metamateriais hiperbólicos), ou viceversa, e entón temos ondas **hiperbólicas**.

**S7.2.-Expresións das ondas paraxiais.** A **aproximación  $z$ -paraxial** destas ondas emitidas, por consistencia, dende  $(0, 0, z_1)$ , obtense co mesmo procedemento que no caso isotrópico,

$$\mathcal{L}_{op} \approx n_o(z - z_1) + \frac{n_o(x^2 + y^2)}{2(z - z_1)}, \quad \mathcal{L}_{ep} \approx n_e(z - z_1) + \frac{n_o^2 x^2}{2n_e(z - z_1)} + \frac{n_e y^2}{2(z - z_1)} \quad (144)$$

Observamos que a segunda superficie de onda é **esferocilíndrica**. Daquela, podemos escribir a onda como

$$\mathcal{E}_{1e}(x, y, z) = \frac{A_{o1}}{(z - z_1)} e^{ik_o n_e z} e^{ik_o (n_o^2/n_e) \frac{x^2}{2(z - z_1)}} e^{ik_o n_e \frac{y^2}{2(z - z_1)}} \quad (145)$$

que é unha onda parabólica elíptica. Se temos un material hiperbólico, tal que  $n_o^2 < 0$  entón temos unha onda parabólica hiperbólica. Todo isto faise máis evidente achando a **onda á saída do cristal**. Daquela impondo as c.c. obtemos

$$\mathcal{E}_{2e}(x, y, z) = \frac{-A_{o1}/n_o}{(z_1 n_e/n_o^2 - z)^{1/2} (z_1/n_e - z)^{1/2}} e^{ik_o z} e^{ik_o \frac{x^2}{2(z - z_1 n_e/n_o^2)}} e^{ik_o \frac{y^2}{2(z - z_1/n_e)}} \quad (146)$$

que é xa craramente unha onda esferocilíndrica elíptica ou hiperbólica. Nótese que no caso hiperbólico a onda extraordinaria non se atenúa pero a ordinaria si. Ademais, a polarización case-global será aproximadamente ao longo da dirección  $x$ , é dicir,  $\mathcal{E}_{2e} = \mathcal{E}_{2e} \mathbf{u}_x$ . A ordinaria vibra aproximadamente ao longo da dirección  $y$ .

## S8-CONDICIÓNS DE CONTORNO PARAXIAIS

As condicións de contorno do campo electromagnético esixen a continuidade das **compoñentes tanxenciais** do campo eléctrico (óptico) e magnético nunha discontinuidade  $n_1/n_2$ . Consideremos ondas  $z$ -paraxiais (pretas de ondas planas) e discontinuidades  $z_{(p)}$  tamén  $z$ -paraxias.

Para fixar ideas, sexa un campo TE (*idem* para un campo TM), p.ex. un campo eléctrico con compoñente  $y$ , e daquela con compoñente magnética  $x$ , é dicir,  $\mathcal{H}_x \propto \partial \mathcal{E}_y / \partial z$ . Polo tanto, para un campo incidente  $\mathcal{E}_1$ , reflectido  $\mathcal{E}_r$  e transmitido  $\mathcal{E}_2$ , debemos impoñer a **continuidade do campo e a súa derivada** na discontinuidade,

$$\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_r = \mathcal{E}_2, \quad \partial \mathcal{E}_1 / \partial z + \partial \mathcal{E}_r / \partial z = \partial \mathcal{E}_2 / \partial z \quad (147)$$

As ondas paraxiais na discontinuidade pódense representar da seguinte forma (facémolo só para a incidente, o resto son iguais),

$$\mathcal{E}_1(x, y, z_{(p)}) \approx e^{ik_o n_1 z_{(p)}} \mathbf{E}_{o1}(0) e^{i\varphi'_1(x, y, 0)} \equiv e^{ik_o n_1 z_{(p)}} \mathcal{E}_1(x, y) \quad (148)$$

onde usamos  $\varphi = n_1 z + \varphi'$ . Para a derivada desta onda na discontinuidade temos en boa aproximación

$$\partial \mathcal{E}_1(x, y, z_{(p)}) / \partial z \approx ik_o n_1 e^{ik_o n_1 z_{(p)}} \mathbf{E}_{o1} e^{i\varphi'_1} \quad (149)$$

Con esta representación podemos escribir as **condicións de continuidade** (contorno), da Ec. (147), na superficie (fronteira)  $z_{(p)}$  como segue

$$e^{ik_o n_1 z_{(p)}} \mathbf{E}_{o1} e^{i\varphi'_1} + e^{-ik_o n_1 z_{(p)}} \mathbf{E}_{or} e^{i\varphi'_r} = e^{ik_o n_2 z_{(p)}} \mathbf{E}_{o2} e^{i\varphi'_2} \quad (150)$$

$$e^{ik_o n_1 z_{(p)}} \mathbf{E}_{o1} e^{i\varphi'_1} - e^{-ik_o n_1 z_{(p)}} \mathbf{E}_{or} e^{i\varphi'_r} = (n_2/n_1) e^{ik_o n_2 z_{(p)}} \mathbf{E}_{o2} e^{i\varphi'_2} \quad (151)$$

Se facemos a suma e a resta e operamos obtemos a relación de continuidade na superficie  $z_p$  entre as ondas incidente e transmitida, e incidente e reflectida

$$\mathcal{E}_2(x, y, z_{(p)}) = \frac{2n_1}{n_1 + n_2} \mathcal{E}_1(x, y, z_{(p)}), \quad \mathcal{E}_r(x, y, z_{(p)}) = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \mathcal{E}_1(x, y, z_{(p)}) \quad (152)$$

logo

$$\mathcal{E}_2(x, y) = \frac{2n_1}{n_1 + n_2} e^{ik_o(n_1 - n_2)z_{(p)}} \mathcal{E}_1(x, y) = t(x, y) \mathcal{E}_1(x, y) \quad (153)$$

Se agora sustituímos este resultado na Ec. (150), e desdexando o campo reflectido obtemos

$$\mathcal{E}_r(x, y) = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} e^{ik_o 2n_1 z_{(p)}} \mathcal{E}_1(x, y) = r(x, y) \mathcal{E}_1(x, y) \quad (154)$$

Obviamente estas ecuacións implican relacións de unicidade de fase e continuidade de amplitude que resoven as condicións de contorno, é dicir, tendo en conta  $\mathcal{E}_{(1,2,r)}(x, y) = \mathbf{E}_{(o1,o2,or)} e^{i\varphi'_{(1,2,r)}}$ , obtemos

$$n_1 z_{(p)} + \varphi'_1 = n_2 z_{(p)} + \varphi'_2, \quad n_1 z_{(p)} + \varphi'_1 = -n_1 z_{(p)} + \varphi'_r \quad (155)$$

e daquela cúmplese a Ec. (150) (e tamén a Ec. (151), que é a continuidade da derivada ou do campo magnético), polo tanto

$$\mathbf{E}_{o1} + \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \mathbf{E}_{o1} = \frac{2n_1}{n_1 + n_2} \mathbf{E}_{o1} \quad (156)$$

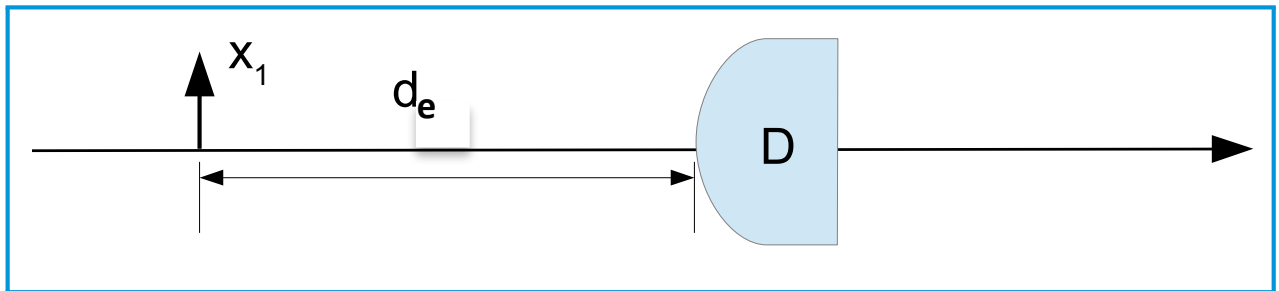
**En conclusión**, as ecuacións (153) e (154) son as tranformacións paraxiais da onda incidente por R e T. (Ver, por exemplo, *Eur. J. Phys.*, 32, 1331, 2011).



### S9.-INSTRUMENTOS OPTICOS BÁSICOS

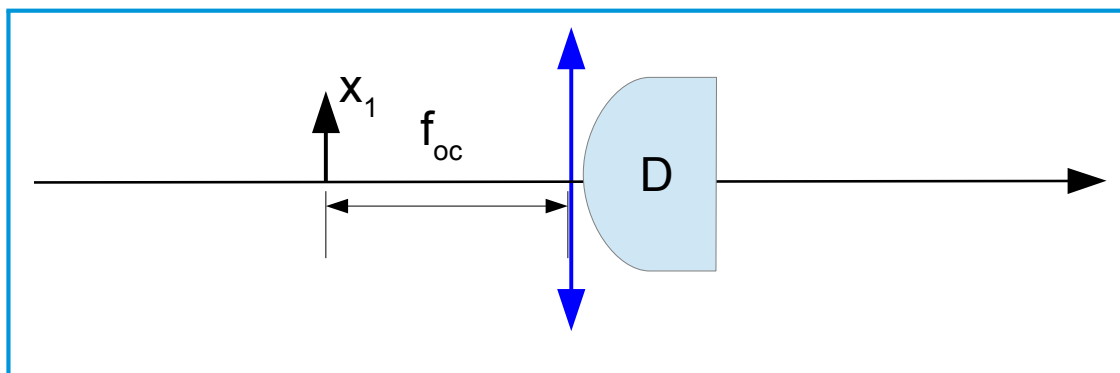
**-Potencia de aumento.** Sexa un instrumento óptico (IO: sistemas de varios elementos ópticos). Consideramos que a imaxe dun obxecto producida polo IO subtende un ángulo  $\alpha_I$  respecto a un sistema óptico detector: sistema visual (SV), cámara CCD, .... Se por outra banda, o ángulo que subtende o obxecto respecto ao sistema detector (é dicir, sen instrumento) é  $\alpha_o$ , entón defínese a **potencia de aumento** do IO como

$$P.A. = \frac{\alpha_I}{\alpha_o} \quad (\#x) \quad (157)$$



O ángulo sen IO defínese como  $\alpha_o = x_1 / (-d_e)$  (ver Figura), onde  $d_e$  é a distancia de detección máis cercana que se pode usar. Para o SV tómasse o valor estándar  $d_e = 0.25$  m.

**-Microscopio simple (lupa).** Sexa unha lente delgada de espesor  $d_{oc}$ , índice  $n$  e focal  $f_{oc}$ , no plano  $z=0$ , e un obxecto no plano focal obxecto da lente (ver Figura).



Sexa un punto luminoso arbitrario  $x_1$  do obxecto emitindo con amplitude  $E_o$ , entón a onda que emerxe xusto despois da lente vén determinada pola relación

$$\left\{ t_1 t_2 e^{ik_o n d_o} e^{-ik_o \frac{(x^2+y^2)}{2f_{oc}}} \right\} \frac{A_o}{(0 + f_{oc})} e^{ik_o f_{oc}} e^{ik_o \frac{[(x-x_1)^2+y^2]}{2(0+f_{oc})}} = E_{o2} e^{ik_o \alpha x} \quad (158)$$

xa que as fases cuadráticas canceláanse. Polo tanto emerxerá unha **onda plana** coa seguinte amplitude  $E_{o2} = t_1 t_2 A_o e^{ik_o (n d_{oc} + f_{oc} + x_1^2 / 2 f_{oc})} / f_{oc}$ , e inclinación  $\alpha = -x_1 / f_{oc}$ , que será xusto o ángulo  $\alpha_I$ . Daquela obtemos

$$P.A. = (-x_1 / f_{oc}) / (-x_1 / d_e) = d_e / f_{oc} = d_e \mathcal{D} \quad (159)$$

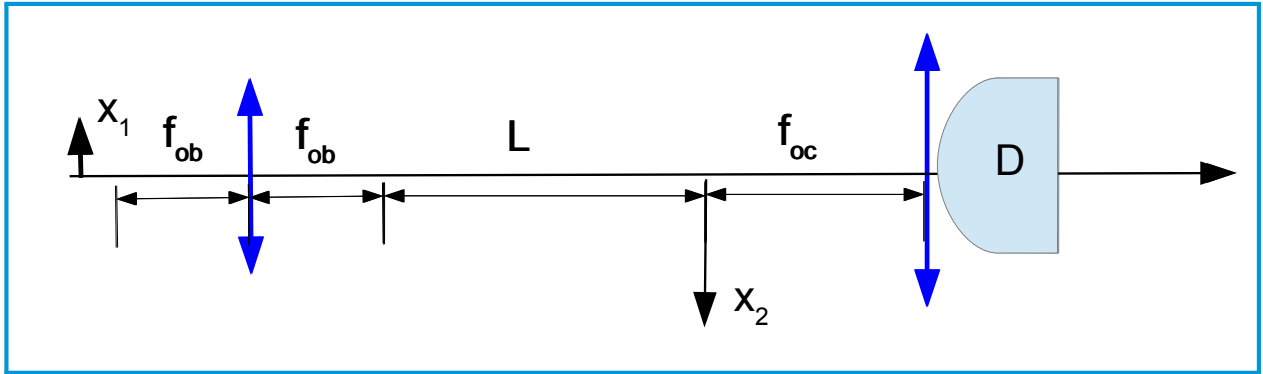
**Exem.**-Se  $f_{oc} = 2.5$  mm, entón temos unha potencia de aumento  $P.A. = 25x$ , que debería aparecer indicado no IO.

**-Microscopio composto.** Neste caso hai unha segunda lente ( **lente obxectivo**) de espesor  $d_{ob}$ , índice  $n$  e focal  $f_{ob}$ . A lente forma imaxe en

$$z_2 = f_{ob} + L,$$

onde  $L=160$  mm é un valor estándar (lonxitude do tubo). O tamaño da imaxe vén dada pola expresión

$$x_2 = Mx_1 = (1 - z_2/f_{ob}) = -L/f_{ob}$$



Nótese que a esa distancia  $z_2$  está o plano focal obxecto do ocular, logo o ocular actúa como lupa, e polo tanto obtemos

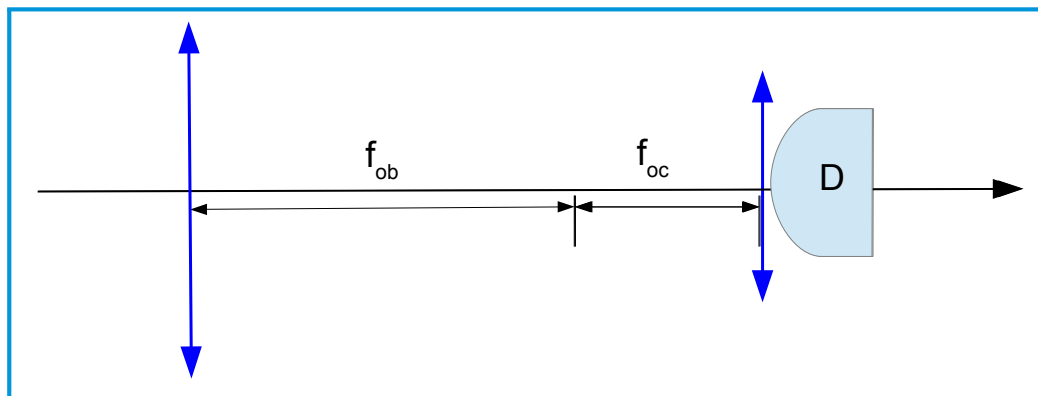
$$P.A. = \frac{(x_2/f_{oc})}{(-x_1/d_e)} = -\frac{x_2}{x_1} \frac{d_e}{f_{oc}} = -M_{ob} (P.A.)_{oc} = \frac{L/d_e}{f_{ob}f_{oc}} \tag{160}$$

**-Telescopio de Kepler.** Consiste en dúas lentes acopladas en foco, é dicir, separadas  $d = f_{oc} + f_{ob}$ , logo un **sistema afocal**. Suponse que un punto lonxano alcanza o sistema en forma de onda plana de amplitude  $E_o$  e incidindo baixo un ángulo  $\alpha_o$ . A onda xusto despois da primeira lente é

$$\{t_1 t_2 e^{ik_o n d_{ob}} e^{-ik_o \frac{(x^2+y^2)}{2f_{ob}}}\} E_o e^{ik_o \alpha_o x} = (A_{o2}/z_2) e^{-ik_o \left\{ \frac{(x-x_2)^2 + (y-y_2)^2}{2z_2} \right\}} \tag{161}$$

logo  $z_2 = f_{ob}$ ,  $x_2 = \alpha_o f_{ob}$  e  $y_2 = 0$ . Despois de propagarse, a onda xusto despois da segunda lente é

$$\{t_1 t_2 e^{ik_o n d_{oc}} e^{-ik_o \frac{(x^2+y^2)}{2f_{oc}}}\} \frac{A_{o2}}{f_{ob} - (f_{ob} + f_{oc})} e^{-ik_o \left\{ \frac{(x+\alpha_o f_{ob})^2 + y^2}{2(f_{ob} + f_{oc} - f_{ob})} \right\}} = E_{o3} e^{i\alpha_I x} \tag{162}$$



É inmediato ver que emerxe unha onda plana baixo un ángulo  $\alpha_I = -\alpha_o (f_{ob}/f_{oc})$ . Logo, obviando o signo (inversión de imaxe), temos  $P.A. = f_{ob}/f_{oc}$ .